Espacios vectoriales

Unidad 3

Guía de actividades

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1.

a) Determinar si $\vec{u} = (1, 2)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (2, 3)$ y $\vec{w} = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$.

b) Determinar si $\vec{u} = (4, -1, 3)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (2, 0, 3)$ y $\vec{w} = (0, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

c) Determinar si $\vec{u} = (1, 0, -1, -1)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 1, 1)$ y $\vec{z} = (0, 1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 2. Analizar si $\vec{v}$ pertenece o no al subespacio S en cada uno de los siguientes casos.

a) $S = \langle (1, 2, 3) \rangle \subset \mathbb{R}^3$; $\quad \vec{v} = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.

b) $S = \langle (1, 2, 3),\ (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle \subset \mathbb{R}^3$; $\quad \vec{v} = (-5, -10, -15)$.

c) $S = \langle (1, -1, 2, 1),\ (2, 1, 3, 0) \rangle \subset \mathbb{R}^4$; $\quad \vec{v} = (0, -3, 1, 1)$.

Ejercicio 3.

a) Hallar dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^3$ que contengan al vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

b) Hallar dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^3$ que contengan al vector $v = (1, 1, 0)$ y no contengan al vector $w = (0, 1, 1)$.

c) Hallar tres subespacios distintos de $\mathbb{R}^4$ que contengan al vector $v = (1, 1, 0, 0)$ y no contengan al vector $w = (0, 0, 1, 1)$.

Ejercicio 4. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^n$ o no.

a) $n = 2,\ \{(1, 1),\ (1, -1)\}$.

b) $n = 2,\ \{(1, 1),\ (1, -1),\ (3, 4)\}$.

c) $n = 3,\ \{(1, 1, -1),\ (0, 1, 1),\ (1, 2, 0)\}$.

d) $n = 3,\ \{(1, 1, -1),\ (0, 1, 1),\ (1, 2, 1),\ (3, 2, 1)\}$.

e) $n = 4,\ \{(1, 1, 1, -1),\ (0, -1, 1, -2),\ (1, 1, 0, 1),\ (3, 2, 1, 2)\}$.

Ejercicio 5. Analizar la dependencia o independencia lineal de los conjuntos de vectores del ejercicio anterior.

Ejercicio 6. Hallar (si es posible) tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

Ejercicio 7. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son una base del $\mathbb{R}^n$ indicado.

a) $\{(1, 0, 1),\ (1, 0, -1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

b) $\{(1, 1, 2),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 0)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

c) $\{(1, 1, 2),\ (0, 1, 1),\ (2, 3, 3)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

d) $\{(1, 0, 1),\ (1, 0, -1),\ (0, 0, 1),\ (1, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

e) $\{(1, 1, 1, 1, 1),\ (1, 2, 0, 1, 1),\ (1, 1, 1, 2, 1)\}$ en $\mathbb{R}^5$.

Ejercicio 8. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

a) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_2 = 0\}$.

b) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 :\ x_1 - 2x_3 + x_5 = 0,\ 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0,\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.

c) $S = \langle (1, 1, -1),\ (0, 1, 1),\ (1, 2, 0) \rangle$.

Ejercicio 9. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ y $T = \langle (2, 3, -1),\ (-2, 1, 5),\ (4, 2, -6) \rangle$:

a) Mostrar que $T \subset S$.

b) Calcular $\dim(S)$, $\dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T = S$ o no.

Ejercicio 10. Considerar la recta $S = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) = \lambda(1, -1) + (0, 1)\}$.

a) ¿Porqué S no es un subespacio?

b) Dar la ecuación de una recta L paralela a S para que sí defina un subespacio. Escribir la base de esta recta L.

Ejercicio 11. Hallar, si es posible, todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la condición pedida en cada caso:

a) El vector $\vec{v} = \left(a + \frac{1}{2}, -4, a + \frac{1}{2}\right)$ pertenezca al subespacio $S \in \mathbb{R}^3$, de base $\{(-1, 2, 5); (-1, 6, 2)\}$,

b) El vector $\vec{v} = (2a + 12, -1 + 2a, -2)$ pertenezca al subespacio $S \in \mathbb{R}^3$, de base $\{(-1, -1, 0); (1, 5, -1)\}$,

c) El vector $\vec{v} = \left(\frac{a}{6}, -\frac{a}{6} + 2, -2\right)$ pertenezca al subespacio $S \in \mathbb{R}^3$, de base $\{(-1, 0, 1); (1, -1, 0)\}$.