Rectas y planos

UNIDAD 2

GUÍA DE ACTIVIDADES

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Rectas y planos

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L.

a) $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = \lambda(-2,3) + (2,2),\ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
$P_1 = (2,2),\ P_2 = (-2,3),\ P_3 = (0,0),\ P_4 = (12,-13),\ P_5 = (2,-1)$.

b) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(-1,1,1) + (3,-3,-3),\ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.
$P_1 = (3,-3,-3),\ P_2 = (0,0,0),\ P_3 = (-1,1,1),\ P_4 = (3,4,0),\ \ P_5 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Ejercicio 2. Graficar y dar una ecuación vectorial para la recta que:

a) pasa por $P = (-1,2)$ con vector director $v = (3,1)$.

b) pasa por $P = (1,-4)$ y $Q = (-1,-3)$.

c) es paralela a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = \lambda(-2,3) + (1,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ y pasa por $P = (1,-4)$.

d) es perpendicular a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = \lambda(2,3) + (5,7),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ y pasa por el origen.

Ejercicio 3.

a) Dar una ecuación vectorial para cada una de las rectas de $\mathbb{R}^2$ determinadas por las siguientes ecuaciones:
(*i*) $y = -2x + 1$ (*ii*) $2x - 3y = 5$ (*iii*) $y = -2$ (*iv*) $x = 3$

b) Dar una ecuación implícita para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:
(*i*) $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = \lambda(3,2) + (1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
(*ii*) $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = \lambda(2,0) + (-1,3),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
(*iii*) $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = \lambda(0,-1) + (2,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación vectorial para la recta que:

a) está dirigida por $v = (0,1,0)$ y pasa por $P = (0,2,4)$.

b) pasa por los puntos $P = (-2,3,4)$ y $Q = (-1,3,1)$.

c) es paralela al eje z y pasa por $P = (1,2,3)$.

d) es perpendicular a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1,-2,1) + (3,5,7),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ y pasa por $P = (1,9,-3)$. ¿Es única?

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes casos, decidir cuáles de los puntos pertenecen al plano Π:

a) $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(0,1,0) + \mu(1,0,0) + (0,0,1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
$P_1 = (1,1,1),\ P_2 = (1,1,0),\ P_3 = (0,1,1),\ P_4 = (a,b,0),\ P_5 = (a,b,1)$.

b) $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(0,2,0) + \mu(1,1,0) + (-1,2,1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
$P_1 = (3,-3,1),\ P_2 = (0,0,0),\ P_3 = (0,5,1),\ P_4 = (-4,3,1),\ \ P_5 = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

Ejercicio 6.

a) Dar una ecuación implícita para el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1,1,0) + \mu(0,-1,2) + (-2,0,4),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

b) Dar una ecuación vectorial para el plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 3y + 2z = 1\}$.

Ejercicio 7. Dar una ecuación vectorial y una ecuación implícita para el plano que:

a) pasa por los puntos $(2,1,2)$, $(1,1,1)$ y $(3,2,7)$.

b) pasa por el punto $(1,2,1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y.

c) es paralelo a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1,2,-4) + (1,2,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ y contiene a los puntos $P = (2,2,1)$ y $Q = (1,2,-3)$.

d) contiene al punto $(-1, 2, 2)$ y es ortogonal a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, 1, -1) + (-1, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 8.

a) Decidir si los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 0, 1)$ y $C = (3, 0, 2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.

b) Decidir si los puntos $A = (8, 2, 4)$, $B = (4, 2, 8)$, $C = (-2, 0, 1)$ y $D = (1, -1, 3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

Ejercicio 9. Dado el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 5y + 3z = 11\}$:

a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2a, a, 7) \in \Pi$.

b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 3a, 5a) \in \Pi$.

Ejercicio 10. Calcular el producto vectorial $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ para los siguientes pares de vectores:

(a) $\vec{v} = (1, -2, -4)$; $\vec{w} = (1, -2, -4)$.

(b) $\vec{v} = (1, -2, -4)$; $\vec{w} = (2, 1, -3)$.

(c) $\vec{v} = (2, 1, -3)$; $\vec{w} = (1, -2, -4)$.

(d) $\vec{v} = (2, 0, 0)$; $\vec{w} = (0, 0, 3)$.

En cada caso, verificar que $\vec{u}$ es ortogonal tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$.

Ejercicio 11. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:

a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?

b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.

c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?

Ejercicio 12. Calcular nuevamente las ecuaciones implícitas de los planos del Ejercicio 7 por medio de su ecuación normal y utilizando el producto vectorial convenientemente para calcular los vectores normales de los mismos.

Intersección de rectas y planos

Ejercicio 13. Sean $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 5\}$, $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, -1, -1) + (1, 0, -2), \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \mu(3, 5, 1) + (0, 1, 2), \mu \in \mathbb{R}\}$. Calcular $L \cap \Pi$ y $L' \cap \Pi$.

Ejercicio 14. Determinar si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:

a) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, 0, -1) + (-1, 1, 2), \lambda \in \mathbb{R}\}$
$L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \mu(-1, 1, 2) + (1, 0, -1), \mu \in \mathbb{R}\}$.

b) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, 1, -1) + (-1, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}\}$
$L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \mu(2, 2, -2) + (1, 0, -1), \mu \in \mathbb{R}\}$.

c) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1, 1, 2), \lambda \in \mathbb{R}\}$
$L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \mu(-2, -1, 2) + (3, 3, -2), \mu \in \mathbb{R}\}$.

d) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, 2, -1) + (-1, -1, 2), \lambda \in \mathbb{R}\}$
$L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \mu(-1, 1, 1) + (3, 2, -1), \mu \in \mathbb{R}\}$.

En cada caso determinar si existe un plano que contenga a L y L'. Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

Ejercicio 15. Determinar en qué casos los planos Π_1 y Π_2 se intersecan y hallar la intersección.

a) $\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + 2y - 3z = 1\}$; $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - \frac{3}{2}z = 1\}$.

b) $\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y - 1 = 0\}$; Π_2 el plano dirigido por $(0, 0, 1)$, $(2, 3, 3)$ que pasa por $(1, 1, 2)$.

c) Π_1 el plano que pasa por $(-1,1,2)$ con vector normal $(1,2,-1)$; Π_2 el plano que pasa por $(1,1,1)$, $(2,3,1)$ y $(-1,-2,2)$.

Ejercicio 16. Hallar ecuaciones implícitas para cada una de las rectas siguientes (es decir, describirlas como intersección de dos planos dados por ecuaciones implícitas):

a) L_1 es intersección del plano xy con el plano yz.

b) $L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = \lambda(1,0,-1) + (-1,1,2), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

c) L_3 pasa por los puntos $(-5,3,7)$ y $(2,-3,3)$.

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos, hallar la intersección de las rectas L y L':

a) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = \lambda(1,1,0) + (0,-1,2), \lambda \in \mathbb{R}\}$
$L' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - y + z = 3, \; -2x + y + z = -2\}$.

b) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = \lambda(1,1,0) + (0,-1,2), \lambda \in \mathbb{R}\}$
$L' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - y + z = 3, \; -2x + 2y + z = 2\}$.

Distancias y ángulos entre rectas y planos

Ejercicio 18. Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - y = 1\}$ y $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x + y = 3\}$.

a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2.

b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

Ejercicio 19. Sean $L_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = \lambda(1,-2,1) + (0,0,-2), \; \lambda \in \mathbb{R}\}$ y L_2 la recta que pasa por $(1,4,2)$ y $(0,2,-1)$.

a) Verificar que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

b) Hallar un plano que contenga a L_1 y L_2 y determinar el ángulo entre L_1 y L_2.

Ejercicio 20. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1,2,-1)$ y pasa por $(-1,3,1)$, y sea L_2 la recta que pasa por $(-1,1,3)$ y por $(1,2,7)$.

a) Verificar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

b) Determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1,1,3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2.

Ejercicio 21. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = \lambda(1,-1,0) + (2,1,-1), \; \lambda \in \mathbb{R}\}$ que están a distancia 6 del punto $P = (2,1,-1)$.

Ejercicio 22. Calcular la distancia entre:

a) la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \, : \, X = \lambda(1,1) + (3,0), \; \lambda \in \mathbb{R}\}$ y el punto $P = (-1,1)$.

b) la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = \lambda(2,-2,-3) + (0,2,2), \; \lambda \in \mathbb{R}\}$ y el punto $P = (0,-2,-1)$.

c) el plano Π que pasa por $(1,2,1)$ y tiene vector normal $(1,-1,2)$ y el punto $P = (1,2,5)$.

Ejercicio 23. Consideren los planos $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = \lambda(-2,1,1) + \mu(0,-3,4) + (5,-1,0), \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ y $\Pi' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 7x + 8y + 6z = -2\}$.

a) Verifiquen que Π y Π' son paralelos.

b) Construyan una recta L perpendicular a ambos planos y calculen $P = L \cap \Pi$ y $Q = L \cap \Pi'$.

c) Calculen $d(P,Q)$. ¿Qué representa en este problema el número $d(P,Q)$?

d) ¿Importa qué recta perpendicular a Π y Π' construyeron? Expliquen este hecho geométricamente.

Ejercicio 24. Se consideran las rectas $L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 4,\, 4x - y - 2z = 9\}$ y $L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, 0, 2) + (1, 2, -3),\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas.

b) Hallar un plano Π perpendicular a L_2 que pase por $P = (1, 2, -3)$ y determinar $Q = L_1 \cap \Pi$.

c) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué representa el número $d(P, Q)$ en este problema?

Ejercicio 25. Sean Π el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y L la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(-1, 0, 1) + (1, 1, 2),\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

a) Probar que L es paralela a Π.

b) Hallar una recta L' ortogonal a Π que pase por $P = (1, 1, 2)$ y determinar $Q = L' \cap \Pi$.

c) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué representa el número $d(P, Q)$ en este problema?

Ejercicio 26. Consideren el plano Π el plano de ecuación $7x - 7z = 1$ y las rectas $L_1 = \left\{X \in \mathbb{R}^3 : X = \alpha \cdot (2, 1, 1) + (0, 0, 1)\right\}$ y $L_2 = \left\{X \in \mathbb{R}^3 : X = \beta \cdot (k^2, 5k + 2, 1) + (1, 0, -1)\right\}$.
Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla que el ángulo que forman L_1 y L_2 sea de $\frac{\pi}{2}$ y la distancia entre L_2 y el plano sea cero.

Ejercicio 27. Consideren las rectas $L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 1,\, x - 2y + z = -2\}$ y $L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(2, -3, 0) + (0, 0, -1)$.

a) Prueben que L_1 y L_2 son alabeadas.

b) Construyan dos planos paralelos Π_1 y Π_2 tales que Π_1 contenga a L_1 y Π_2 contenga a L_2. *Sugerencia: encuentren vectores directores para L_1 y L_2 y úsenlos como vectores directores de los plano Π_1 y Π_2.*

c) Calculen $d(\Pi_1, \Pi_2)$ (como en el ejemplo de la teórica de planos paralelos). ¿Qué representa el número $d(\Pi_1, \Pi_2)$ en este problema?

Proyecciones y simetrías.

Ejercicio 28. Encontrar el simétrico de

a) $(2, 1)$ con respecto a $(0, 0)$.

b) $(2, -4)$ con respecto a $(-1, 1)$.

c) $(3, -1, 0)$ con respecto a $(0, -1, 2)$.

d) $(0, -1, 0)$ con respecto a $(1, 1, 1)$.

Ejercicio 29. Encontrar, si es posible, un punto Q tal que

a) el simétrico de $(4, 1)$ con respecto a Q es $(-2, 3)$.

b) el simétrico de $(3, -1, 1)$ con respecto a Q es $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 30. Hallar el simétrico de

a) $(2, -1)$ con respecto al eje x

b) $(2, 0)$ con respecto al eje y.

c) $(3, -1)$ con respecto a la recta $y = 2x - 4$.

Ejercicio 31. En cada caso, hallar, si es posible, una recta de modo que los puntos dados sean simétricos respecto de ella.

a) $(1, 3), (3, 1)$

b) $(-3, 4), (5, 0)$

c) $(3, -4), (0, 5)$

Ejercicio 32. Hallar el simétrico de

a) $(1, 0, -4)$ con respecto al punto $(2, -1, 0)$.

b) $(0,0,0)$ con respecto a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : \lambda(0,-1,2) + (1,1,0), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

c) $(-1,1,2)$ con respecto al plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z = 2\}$.

Ejercicio 33. Dados $P = (-1,0,3)$ y $Q = (2,-1,0)$, hallar:

a) un punto R de modo que P y Q sean simétricos respecto de R.

b) una recta L de modo que P y Q sean simétricos respecto de L.

c) un plano Π de modo que P y Q sean simétricos respecto de Π.

¿En qué casos el resultado es único?

Ejercicio 34. Hallar la proyección ortogonal de

a) $(5,-3)$ sobre el eje de las x y sobre el eje de las y.

b) $(5,-3)$ sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = \lambda(1,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

c) $(1,0,2)$ sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(2,-1,0), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

d) $(-1,1,0)$ sobre el plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3z = 0\}$.

Ejercicio 35.

a) Determinar todos los $P \in \mathbb{R}^2$ tales que su proyección ortogonal sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = \lambda(1,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ sea $(2,2)$.

b) Calcular, si es posible, un vector $\vec{w}$ de norma 1 tal que la proyección ortogonal del punto $(2,3,1)$ sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda\vec{w}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ sea el extremo de $3\vec{w}$.

Ejercicio 36. Sean los puntos $P = (1,-5,3)$, $Q = (0,-3,1)$ y un plano Π. Si se sabe que Q es la proyección ortogonal de P sobre Π y, R es el punto simétrico de P respecto a Π. Dar la ecuación de un plano Π' paralelo al plano Π y que pasa por R.

Ejercicio 37. Dados los vectores $\vec{v} = (3,1,0)$, $\vec{w} = (4,2,-1)$ y $\vec{u} = (2,1,-2)$, hallar todos los vectores $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{z}$ es ortogonal a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ simultáneamente y el vector cuyo extremo es la proyección ortogonal del extremo de $\vec{z}$ sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ tenga norma 2.