

Vectores

UNIDAD 1

GUÍA DE ACTIVIDADES

CONJUNTOS

Ejercicio 1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$, decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) $5 \in A$ b) $2 \notin A$ c) $\{4, 7\} \subseteq A$ d) $\{1, 6, 11\} \subseteq A$ e) $\{3, 8\} \not\subseteq A$

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) $5 \in \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 10\}$
 b) $\{\frac{1}{2}, 4\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 10\}$
 c) $\{\frac{1}{2}, 4\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 10\}$
 d) $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 = x\}$
 e) $\{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^3 = x\}$

Ejercicio 3. Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$, $B = \{6, 8, 10\}$ y $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ describir por extensión los siguientes conjuntos.

- a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$ d) $A \cap B$ e) $A \cap C$ f) $B \cap C$
 g) $(A \cap B) \cup C$ h) $A \cap (B \cup C)$ i) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ j) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

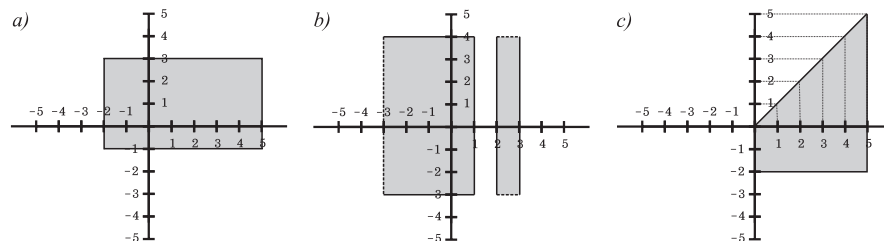
Ejercicio 4. Dados los conjuntos $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B = \{\alpha, \beta, \epsilon\}$, $C = \{\alpha, \beta\}$ y $D = \{\gamma, \epsilon\}$, describir por extensión los siguientes conjuntos.

- a) $A \setminus B$ b) $B \setminus A$ c) $(A \setminus B) \cup B$ d) $(B \setminus A) \cup A$ e) $C \setminus A$
 f) $A \setminus C$ g) $B \setminus D$ h) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ i) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
 j) A^c , siendo $\mathcal{U} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \theta, \rho\}$ el conjunto universal.
 k) A^c , siendo $\mathcal{U} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ el conjunto universal.

Ejercicio 5. Graficar en el plano los siguientes conjuntos.

- a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 8, 1 \leq y \leq 4\}$
 b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 8, 1 \leq y < 4\}$
 c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x \leq 5, 2 \leq y < 3\}$
 d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x \leq 9, 2 \leq y < 3\}$
 e) $A \setminus B$ f) $A \setminus C$ g) $A \setminus D$ h) $C \setminus D$
 i) $A \cap C$ j) $A \cup C$ k) $A \cap D$ l) $A \cup D$
 m) A^c , siendo $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10\}$

Ejercicio 6. Describir por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.



VECTORES

Ejercicio 7. Dados los vectores $\vec{v} = (3, 2)$ y $\vec{w} = (-1, 4)$ en $\mathbb{R}^2$:

- Graficarlos en el plano.
- Calcular y graficar los puntos $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $-\vec{v}$, $2\vec{w}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v}$.
- Calcular $3\vec{v} + 3\vec{w}$ y $3(\vec{v} + \vec{w})$. ¿Qué le dice esto?
- Representar en un mismo gráfico los puntos $-2\vec{v}$, $-\vec{v}$, $\vec{0}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$. ¿Qué nota? ¿Qué características tienen los puntos de la forma $k\vec{v}$ con $k \in \mathbb{Z}$ cualquiera? ¿Y los puntos $\lambda\vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera?

Ejercicio 8. Dados los vectores $\vec{v} = (1, 0, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 0)$ y $\vec{u} = (1, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$:

- Graficarlos en el espacio.
- Calcular y graficar los puntos $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{w} - \vec{u}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$.
- Sabiendo los extremos de los vectores $\vec{0}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{u}$ son vértices de un cubo, escribir las coordenadas de los otros cuatro vértices de dicho cubo.
- Hallar, si es posible, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $(1, -2, 1) = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} + \gamma\vec{u}$.

Ejercicio 9. Dados en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{v} = (1, 2)$, $\vec{w} = (-2, 5)$ y $\vec{u} = (3, -1)$:

- Graficarlos en el plano.
- Graficar $\vec{v}_1 = (-1, 2)$, $\vec{w}_1 = (2, 5)$ y $\vec{u}_1 = (-3, -1)$. ¿Qué efecto geométrico produce el cambiar el signo a la primera coordenada de un vector?
- Graficar $\vec{v}_2 = (1, -2)$, $\vec{w}_2 = (-2, -5)$ y $\vec{u}_2 = (3, 1)$. ¿Qué efecto geométrico produce el cambiar el signo a la segunda coordenada de un vector?
- Graficar $-\vec{v}$, $-\vec{w}$ y $-\vec{u}$. ¿Qué efecto geométrico produce el multiplicar a un vector por -1 ?

Ejercicio 10. Consideren en $\mathbb{R}^2$ el vector $\vec{t} = (4, 2)$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} = (-4, 1)$, $\vec{w} = (-3, 6)$ y $\vec{u} = (-1, 7)$.

- Grafiquen todos los vectores en el plano.
- Grafiquen, con la misma escala, el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} + \vec{t}$, $\vec{w} + \vec{t}$ y $\vec{u} + \vec{t}$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} - \vec{t}$, $\vec{w} - \vec{t}$ y $\vec{u} - \vec{t}$. ¿Qué efecto geométrico produce sumar el vector $\vec{t}$ a los puntos de $\mathbb{R}^2$? ¿Y restar el vector $\vec{t}$?
- Grafiquen, con la misma escala, el triángulo cuyos vértices son los extremos de $2\vec{v}$, $2\vec{w}$ y $2\vec{u}$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\frac{1}{2}\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{w}$ y $\frac{1}{2}\vec{u}$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar por 2? ¿Y por $\frac{1}{2}$?

Ejercicio 11. Dado un vector se le realizan dos operaciones consecutivas: primero se lo multiplica por un escalar (dilatación) y luego se le sumo otro vector fijo (traslación).

- Si se le aplican estas dos operaciones al vector $\vec{v} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega al vector $(-6, 12)$. ¿Se puede saber cuál fue la dilatación y cuál la traslación?
- Si se le aplican las dos operaciones a $\vec{v} = (1, 2)$ y $\vec{w} = (3, 4)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega a los vectores $\vec{v}_1 = (-6, 12)$ y $\vec{w}_1 = (-5, 13)$ respectivamente. ¿Se puede saber cuál fue la dilatación y cuál la traslación? Hallarlas.
- ¿Puede ser que luego de aplicar la misma dilatación y la misma traslación a los vectores $\vec{v} = (1, 1)$ y $\vec{w} = (2, -4)$ se llegue a los vectores $\vec{v}_1 = (2, 4)$ y $\vec{v}_2 = (-2, 3)$ respectivamente?
- Si se le aplican las dos operaciones en $\mathbb{R}^3$ a $\vec{v} = (1, 1, 1)$ se llega a $\vec{v}_1 = (2, 1, 5)$. Mostrar que si λ es el escalar que da la dilatación, al aplicarla las mismas dos operaciones a $\vec{w} = (2, 1, 3)$ se llega a $(\lambda + 2, 1, 2\lambda + 5)$.

Ejercicio 12.

- Calcular y graficar el punto medio entre (los extremos de) $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{w} = (3, 2)$ en $\mathbb{R}^2$.
- Calcular y graficar el punto medio entre (los extremos de) $\vec{v} = (1, 7, 3)$ y $\vec{w} = (-1, 3, 0)$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 13. Dados los vectores $\mu = (1; 2)$ y $\chi = (1; 4)$. Calcular las coordenadas del vector $\vec{v} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\mu + \frac{1}{5}\chi)$:

- a) De manera exacta.
- b) Aproximadas a tres cifras decimales.

PRODUCTO ESCALAR

Ejercicio 14. Calcular los siguientes productos escalares de vectores de $\mathbb{R}^2$.

- a) $(1, -1) \cdot (2, 4)$
- b) $(1, 3) \cdot (-6, 2)$
- c) $(1, 2) \cdot (1, 2)$
- d) $(-1, 0) \cdot (0, 1)$

Ejercicio 15. Dados los vectores $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$ y $\vec{u} = (-1, -3, 2)$ en $\mathbb{R}^3$ calcular las siguientes operaciones.

- a) $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\vec{w} \cdot \vec{v}$.
- b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u}$; $(\vec{v} \cdot \vec{u}) + (\vec{w} \cdot \vec{u})$.
- c) $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$; $3(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
- d) $\vec{v} \cdot \vec{v}$; $\vec{w} \cdot \vec{w}$.

¿Qué conclusiones sacan?

Ejercicio 16. Calcular la norma de los siguientes vectores.

- a) $(-3, 4) \in \mathbb{R}^2$
- b) $(-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$
- c) $(1, -2, -2, -1) \in \mathbb{R}^4$
- d) $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 17. Dados $\vec{v} = (3, -4)$ y $\vec{w} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$:

- a) Calcular $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{v} + \vec{w}\|$, $\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$, $\|2\vec{v}\|$ y $\|\frac{1}{2}\vec{v}\|$.
- b) ¿Qué relación hallaron entre $\|\vec{v}\|$ y $\|2\vec{v}\|$? ¿Y entre $\|\vec{v}\|$ y $\|\frac{1}{2}\vec{v}\|$?
- c) ¿Qué relación hallaron entre $\|\vec{v} + \vec{w}\|$ y $\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$?

Ejercicio 18. Calcular la distancia entre los puntos $\vec{v} = (2, 5)$ y $\vec{w} = (1, 3)$

- a) de forma exacta.
- b) redondeando con tres decimales de exactitud.
- c) redondeando con cinco decimales de exactitud.

Ejercicio 19. Calcular la distancia entre los puntos dados.

- a) $(1, -3)$ y $(0, 0)$
- b) $(1, -3)$ y $(4, 1)$
- c) $(1, 2, 3)$ y $(4, 1, 2)$
- d) $(4, -2, 6)$ y $(3, -4, 4)$.

Ejercicio 20. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican.

- a) $\vec{v} = (4, k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$.
- b) $\vec{v} = (2, k, -1)$ y $\|\vec{v}\| = 2$.
- c) $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$.
- d) Los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (k, -k, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ estén a distancia 2.

Ejercicio 21. Graficar en el plano los siguientes conjuntos.

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\}$.
- b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1\}$.
- c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (1, 1)\| = 1\}$.
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (1, 1)\| \leq 1\}$.

Ejercicio 22. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores.

- a) $(1, 0)$ y $(0, 1)$ b) $(1, 2)$ y $(-2, 1)$. c) $(1, 1)$ y $(0, 1)$ d) $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

Ejercicio 23. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ que verifican simultáneamente:

- a) la norma del vector $(2, -2, k)$ es igual a 3.
b) el ángulo entre los vectores $(2, 1, 1)$ y $(1, -1, k)$ es $\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 24.

- a) Dar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ cuya norma es 2 y el ángulo que forman con el semieje positivo de las x es $\frac{\pi}{6}$.
b) Dar todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que verifican que la norma es 3 y los tres ángulos que forma con los semiejes positivos son iguales.

Ejercicio 25. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no.

- a) $(1, -1)$ y $(2, 4)$ b) $(1, 3)$ y $(-6, 2)$ c) $(1, 2)$ y $(1, 2)$.
d) $(1, 3, 5)$ y $(3, 0, -2)$ e) $(-1, 2, 1)$ y $(6, 1, 4)$ f) $(2, 4, -2), (-3, -6, 3)$.

Ejercicio 26. En cada caso, hallar:

- a) tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados?
b) todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $(2, -2)$ y tienen norma 1.
c) dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1, 2, 1)$ que no sean paralelos entre sí.
d) tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1, 2, 1)$ y $(1, -3, 0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?

Ejercicio 27. Para vectores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ en $\mathbb{R}^n$, decidir cuales de las siguientes afirmaciones son verdades y cuales falsas.

- a) Si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$ entonces $\vec{v}$ es ortogonal a $-\vec{w}$ y a $5\vec{w}$.
b) Si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$ y a $\vec{u}$ entonces $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w} + \vec{u}$ y a $3\vec{w} - 2\vec{u}$.
c) Si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$ entonces $\vec{v} + \vec{w}$ es ortogonal a $\vec{w}$.
d) Si $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$ y a $\vec{w} - 3\vec{u}$ entonces $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

Ejercicio 28.

- a) Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \sqrt{2}$, el ángulo que forma el vector $\vec{v}$, perteneciente al primer cuadrante, con el semieje positivo de las x es $\frac{\pi}{4}$ y el ángulo que forma $\vec{v} + \vec{w}$ con el semieje positivo de las x es $\frac{\pi}{2}$ hallar $\vec{w}$.
b) Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Sabiendo que el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{\pi}{3}$, $\|\vec{w}\| = 4$ y $\vec{v} - \vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$, calcular $\|\vec{v}\|$.

Ejercicio 29. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ donde $\vec{v}$ tiene norma 1 y $\vec{w} = (k, k - 4, -k)$. Hallar el ó los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w} - 2\vec{v}$
- El ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{\pi}{3}$