UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Rec. 2do. parcial - 13/11/24 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá $z \in \mathbb{C}$, de modo que $z - 8i = (1-i)^2 \cdot \overline{z}$. Indicá la opción que muestra el valor de la parte imaginaria de z.

A) $\dfrac{16}{3}$

B) $\dfrac{8}{3}i$

C) $-\dfrac{8}{3}$

D) $\dfrac{8}{3}$

Opción correcta: C)

Resolución

Escribiendo a z como $a + bi$ y reemplazando la ecuación dada, obtenemos:
$a + bi - 8i = (-1+i)^2 \cdot (a - bi) = -2i \cdot (a - bi)$ y equivalentemente, $a + (b-8)i = -2b - 2ai$.
Igualando parte imaginaria y real correspondientes nos queda que; $a = -2b$ y $b - 8 = -2a$, de donde se deduce el valor de b la parte imaginaria de z. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá z un número complejo que cumple la ecuación $4z^5 + 8i^3 \cdot |z| = 0$ y $\pi < arg(z) < \frac{3\pi}{2}$. Indicá la opción que muestra una expresión para z.

A) $\cos\dfrac{\pi}{10} + i \cdot \sin\dfrac{\pi}{10}$

B) $\sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{13\pi}{10}i}$

C) $\sqrt{2} \cdot e^{\frac{11\pi}{10}i}$

D) $\sqrt[4]{2} \cdot i$

Opción correcta: B)

Resolución

Se puede reescribir la ecuación dada como $z^5 = -2i^3 \cdot |z|$ o bien como $z^5 = 2i|z|$. Desde esta nueva escritura podemos plantear las expresiones polar o las formas exponenciales de los complejos de cada lado del igual para compararlos: $(|z|e^{\alpha i})^5 = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot |z| \cdot e^{0i}$.
Equivalentemente: $|z|^5 e^{5\alpha i + 2k\pi} = 2|z| \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$. Igualando módulos, concluimos que $|z| = \sqrt[4]{2}$ e igualando argumentos tenemos que $5\alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{2}$, de donde podemos encontrar las soluciones no nulas de la ecuación dada y solo una cumple con la condición $\pi < arg(z) < \frac{3\pi}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá los polinomios $G(x) = x^2 + a$ y $F(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - bx - 8$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Si $-2i$ es raíz de G y $F(-2) = 0$, elegí la opción que muestra los polinomios cociente y resto que resultan de dividir F por G.

A) Cociente: $x^2 + x - 6$. Resto: 16

B) Cociente: $-8x + 16$. Resto: $x^2 + x - 6$

C) Cociente: $x^2 + x - 6$. Resto: 0

D) Cociente: $x^2 + x - 6$. Resto: $-8x + 16$

Opción correcta: D)

Resolución

Si $-2i$ es raíz de G, también lo es su conjugado. Esto permite calcular que $a = 4$. Al evaluar $F(-2) = 0$ se obtiene $b = 4$. Solo resta realizar el cociente entre ambos polinomios para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 5$ .Indicá la única opción que muestra la factorización de P en $\mathbb{C}[x]$.

A) $(x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

B) $(x-1)(x-\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x^2+2x+4)$

C) $(x-1)(x^2+5)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D) $(x-1)(x-5)(x+5)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Opción correcta: A)

Resolución

$P(x)$ puede ser factorizado por grupos: $x^5 - 5x^3 - x^2 + 5 = x^3(x^2-5) - 1(x^2-5) = (x^3-1)(x^2-5)$. Luego, se factoriza cada uno de los polinomios $(x^3-1) = (x-2)(x^2+x+1)$ y $x^2 - 5 = (x-\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.

Solo resta encontrar las raíces complejas de x^2+2x+4 para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra cómo se clasifica el siguiente sistema: $\begin{cases} -4x_1 & -4x_2 & +x_3 = 0 \\ -2x_1 & +15x_2 & +17x_3 = 0 \\ 3x_1 & -5x_2 & -9x_3 = 1 \end{cases}$

A) Sistema incompatible y no homogéneo.

B) Sistema compatible determinado y homogéneo.

C) Sistema compatible determinado y no homogéneo.

D) Sistema compatible indeterminado y no homogéneo.

Opción correcta: C)

Resolución

El sistema no es homogéneo por lo que se descarta una opción. Luego, se puede triangular la matriz asociada al sistema y ver que la solución obtenida es única. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 10.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la matriz de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Elegí la opción que muestra el resultado de $\det[A^t \cdot (A^3 + A^2)]$

A) 1350

B) 405000

C) 162000

D) 450

Opción correcta: B)

Resolución

La expresión $\det[A^t \cdot (A^3 + A^2)]$ puede reescribirse como $[\det(A)^3 \cdot \det(A+I)]$ aplicando propiedades de los determinantes. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz: $A_T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -k & k \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$. Indicá la opción que muestra todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $T(3;-2;-1) = (-3;0;5)$

A) $k = 1$

B) $k = 0$

C) $k = -1$

D) $k = 5$

Opción correcta: B)
Resolución
Usando la forma matricial de la transformación lineal, planteamos $T(3;-2;-1) = (-3;0;5)$ y tenemos nos queda en la tercer componente $-k+5=5$ con lo cual $k=0$. Este valor también verifica la segunda componente $k=0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde: $M_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y, $T_2(x_1;x_2;x_3) = (x_1 - 2x_2; x_1 - 3x_2)$. Indicá entre las opciones, la única afirmación verdadera.

A) T_1 y T_2 tienen la misma expresión matricial.

B) La matriz de $T_2 \circ T_1$ es la matriz identidad.

C) La matriz de $T_1 \circ T_2$ tiene determinante igual a 1.

D) La matriz de T_1 es la inversa de la matriz de T_2.

Opción correcta: C)
Resolución
Lo primero que podemos hacer es hallar la matriz de T_2: $M_{T_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ Por lo que podemos decir que la primera opción es falsa. Además, podemos hallar las composiciones $T_1 \circ T_1$ y $T_1 \circ T_2$, para analizar las otras opciones. $M_{T_1 \circ T_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ Por otro lado, $M_{T_2 \circ T_1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ podemos descartar la segunda opción. Si realizamos la inversa de T_2 no nos da T_1 por lo tanto la cuarta opción no es correcta. Finalmente, la tercera opción es la correcta: la verificamos calculando el determinante. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.
