UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Rec. 2do. parcial - 13/11/24 - Tema 3

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

  Considerá $z \in \mathbb{C}$, de modo que $z = (-1+i)^2 \cdot \overline{z} + 6i$ Indicá la opción que muestra el valor de la parte imaginaria de z.

  A) $-\frac{6}{5}$

  B) -2

  C) $-2i$

  D) 4

  Opción correcta: B)

  Resolución

  Escribiendo a z como $a+bi$ y reemplazando la ecuación dada, obtenemos:
  $a + bi = (-1+i)^2 \cdot (a - bi) + 6i = -2i \cdot (a - bi) + 6i = -2b + (-2a + 6)i.$
  Igualando parte imaginaria y real correspondientes nos queda que; $a = -2b$ y $b = -2a + 6$, de donde se deduce el valor de b la parte imaginaria de z. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

  Considerá z un número complejo que cumple la ecuación $3z^5 + 9i^3 \cdot |z| = 0$ y $\frac{\pi}{2} < arg(z) < \pi$. Indicá la opción que muestra una expresión para z.

  A) $\cos\dfrac{\pi}{10} + i \cdot \sin\dfrac{\pi}{10}$

  B) $\sqrt{3} \cdot e^{\frac{17\pi}{10}i}$

  C) $\sqrt[4]{3} \cdot e^{\frac{9\pi}{10}i}$

  D) $\sqrt[5]{3} \cdot e^{\frac{9\pi}{10}}$

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Se puede reescribir la ecuación dada como $3z^5 = -9i^3.|z|$ o bien como $z^5 = 3i|z|$. Desde esta nueva escritura podemos plantear las expresiones polar o las formas exponenciales de los complejos de cada lado del igual para compararlos: $(|z|e^{\alpha i})^5 = 3e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot |z|.e^{0i}$.
  Equivalentemente: $|z|^5 e^{5\alpha i + 2k\pi} = 3|z|.e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$. Igualando módulos, concluimos que $|z| = \sqrt[4]{3}$ e igualando argumentos tenemos que $5\alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{2}$, de donde podemos encontrar las soluciones no nulas de la ecuación dada, aunque solo una cumple con la condición $\frac{\pi}{2} < arg(z) < \pi$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

  Considerá los polinomios $G(x) = x^2 + a$ y $F(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - bx - 9$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Si $3i$ es raíz de G y $F(-3) = 0$, elegí la opción que muestra los polinomios cociente y resto que resultan de dividir F por G.

  A) Cociente: $-18x + 144$. Resto: $x^2 + x - 17$

  B) Cociente: $x^2 + x - 17$. Resto: 0

  C) Cociente: $x^2 + x - 17$. Resto: $-18x + 144$

  D) Cociente: $x^2 + x - 17$. Resto: 144

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Si $3i$ es raíz de G, también lo es su conjugado. Esto permite calcular que $a = 9$. Al evaluar $F(-3) = 0$ se obtiene $b = 9$. Solo resta realizar el cociente entre ambos polinomios para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 3x^3 - 8x^2 + 24$ .Indicá la única opción que muestra la factorización de P en $\mathbb{C}[x]$.

A) $(x-2)(x^2+3)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$

B) $(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$

C) $(x-2)(x-3)(x+3)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$

D) $(x-2)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+2x+4)$

Opción correcta: B)
Resolución
$P(X)$ puede ser factorizado por grupos: $x^5-3x^3-8x^2+24 = x^3(x^2-3)-8(x^2-3) = (x^3-8)(x^2-3)$.
Luego, se factoriza cada uno de los polinomios:
$(x^3-8) = (x-2)(x^2+2x+4)$ y $x^2-3 = (x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.
Solo resta encontrar las raíces complejas de x^2+2x+4 para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra cómo se clasifica el siguiente sistema: $\begin{cases} -4x_1 & -4x_2 & +2x_3 = -1 \\ 2x_1 & -8x_2 & +17x_3 = -2 \\ 2x_1 & +5x_2 & -9x_3 = 1 \end{cases}$

A) Sistema no homogéneo y compatible determinado.

B) Sistema no homogéneo y compatible indeterminado.

C) Sistema homogéneo y compatible determinado.

D) Sistema no homogéneo e incompatible.

Opción correcta: A)
Resolución
El sistema no es homogéneo por lo que se descarta una opción. Luego, se puede triangular la matriz asociada al sistema y ver que la solución obtenida es única. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 10.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Elegí la opción que muestra el resultado de $\det[(A^5 - A^4) \cdot A^t]$

A) 275

B) 33275

C) 805255

D) 55

Opción correcta: C)
Resolución
La expresión $\det[(A^5 - A^4) \cdot A^t]$ puede reescribirse como $[\det(A)^5 \cdot \det(A-I)]$ aplicando propiedades de los determinantes. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada: $A_T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -k & 2k \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix}$

Indicá la opción que muestra todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $T(1; -2; -3) = (-10; 4; 0)$.

A) $k = 1$

B) $k = 2$

C) $k = -1$

D) $k = 3$

Opción correcta: C)

Resolución

Usando la forma matricial de la transformación lineal, planteamos $T(1; -2; -3) = (-10; 4; 0)$ y nos queda en la tercera componente $3k + 3 = 0$ con lo cual $k = -1$. Este valor tenemos también verifica la segunda componente $-4k = 4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde: $M_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y, $T_2(x_1; x_2; x_3) = (-x_1 + 2x_2; -x_1 + 3x_2)$ Indicá, entre las opciones, la única afirmación verdadera.

A) T_1 y T_2 tienen la misma expresión matricial.

B) La matriz de $T_2 \circ T_1$ es la matriz identidad.

C) La matriz de $T_1 \circ T_2$ tiene determinante igual a -3.

D) La matriz de T_1 es la inversa de la matriz de T_2.

Opción correcta: C)

Resolución

Lo primero que podemos hacer es hallar la matriz de T_2: $M_{T_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Por lo que podemos decir que la primera opción es falsa. Además, podemos hallar las composiciones $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$, para analizar las otras opciones. $M_{T_1 \circ T_2} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ Por otro lado, $M_{T_2 \circ T_1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ podemos descartar la segunda opción. Si realizamos la inversa de T_2 no nos da T_1 por lo tanto la cuarta opción no es correcta. Finalmente, la tercera opción es la correcta: la verificamos calculando el determinante. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.
