

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra cómo se clasifica el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} -4x_1 & -4x_2 & +2x_3 = -1 \\ 2x_1 & -8x_2 & +17x_3 = -2 \\ 2x_1 & +5x_2 & -9x_3 = 1 \end{cases}$$

- A) Sistema no homogéneo y compatible determinado.
- B) Sistema no homogéneo y compatible indeterminado.
- C) Sistema homogéneo y compatible determinado.
- D) Sistema no homogéneo e incompatible.

Opción correcta: A)

Resolución

El sistema no es homogéneo por lo que se descarta una opción. Luego, se puede triangular la matriz asociada al sistema y ver que la solución obtenida es única. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 10.

---

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Elegí la opción que muestra el resultado de  $\det[(A^5 - A^4) \cdot A^t]$

- A) 275
- B) 33275
- C) 805255
- D) 55

Opción correcta: C)

Resolución

La expresión  $\det[(A^5 - A^4) \cdot A^t]$  puede reescribirse como  $[\det(A)^5 \cdot \det(A - I)]$  aplicando propiedades de los determinantes. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

---

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con matriz asociada:  $A_T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -k & 2k \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix}$ . Indicá la opción que muestra todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $T(1; -2; -3) = (-10; 4; 0)$ .

- A)  $k = 1$
- B)  $k = 2$
- C)  $k = -1$
- D)  $k = 3$

Opción correcta: C)

Resolución

Usando la forma matricial de la transformación lineal, planteamos  $T(1; -2; -3) = (-10; 4; 0)$  y nos queda en la tercera componente  $3k + 3 = 0$  con lo cual  $k = -1$ . Este valor tenemos también verifica la segunda componente  $-4k = 4$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

---

---

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde:  $M_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  y,  $T_2(x_1; x_2; x_3) = (-x_1 + 2x_2; -x_1 + 3x_2)$  Indicá, entre las opciones, la única afirmación verdadera.

- A)  $T_1$  y  $T_2$  tienen la misma expresión matricial.
- B) La matriz de  $T_2 \circ T_1$  es la matriz identidad.
- C) La matriz de  $T_1 \circ T_2$  tiene determinante igual a -3.
- D) La matriz de  $T_1$  es la inversa de la matriz de  $T_2$ .

Opción correcta: C)

Resolución

Lo primero que podemos hacer es hallar la matriz de  $T_2$ :  $M_{T_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  Por lo que podemos decir que la primera opción es falsa. Además, podemos hallar las composiciones  $T_1 \circ T_2$  y  $T_2 \circ T_1$ , para analizar las otras opciones.  $M_{T_1 \circ T_2} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$  Por otro lado,  $M_{T_2 \circ T_1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$  podemos descartar la segunda opción. Si realizamos la inversa de  $T_2$  no nos da  $T_1$  por lo tanto la cuarta opción no es correcta. Finalmente, la tercera opción es la correcta: la verificamos calculando el determinante. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

---

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá  $z \in \mathbb{C}$ , de modo que  $z = (-1 + i)^2 \cdot \bar{z} + 6i$  Indicá la opción que muestra el valor de la parte imaginaria de  $z$ .

- A)  $-\frac{6}{5}$
- B)  $-2$
- C)  $-2i$
- D)  $4$

Opción correcta: B)

Resolución

Escribiendo a  $z$  como  $a + bi$  y reemplazando la ecuación dada, obtenemos:

$$a + bi = (-1 + i)^2 \cdot (a - bi) + 6i = -2i \cdot (a - bi) + 6i = -2b + (-2a + 6)i.$$

Igualando parte imaginaria y real correspondientes nos queda que;  $a = -2b$  y  $b = -2a + 6$ , de donde se deduce el valor de  $b$  la parte imaginaria de  $z$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá  $z$  un número complejo que cumple la ecuación  $3z^5 + 9i^3 \cdot |z| = 0$  y  $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi$ . Indicá la opción que muestra una expresión para  $z$ .

- A)  $\cos \frac{\pi}{10} + i \cdot \sin \frac{\pi}{10}$
- B)  $\sqrt{3} \cdot e^{\frac{17\pi}{10}i}$
- C)  $\sqrt[4]{3} \cdot e^{\frac{9\pi}{10}i}$
- D)  $\sqrt[5]{3} \cdot e^{\frac{9\pi}{10}i}$

Opción correcta: C)

Resolución

Se puede reescribir la ecuación dada como  $3z^5 = -9i^3 \cdot |z|$  o bien como  $z^5 = 3i|z|$ . Desde esta nueva escritura podemos plantear las expresiones polar o las formas exponenciales de los complejos de cada lado del igual para compararlos:  $(|z|e^{i\alpha})^5 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot |z| \cdot e^{0i}$ .

Equivalentemente:  $|z|^5 e^{5\alpha i + 2k\pi} = 3|z| \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ . Igualando módulos, concluimos que  $|z| = \sqrt[4]{3}$  e igualando argumentos tenemos que  $5\alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{2}$ , de donde podemos encontrar las soluciones no nulas de la ecuación dada, aunque solo una cumple con la condición  $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

---

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá los polinomios  $G(x) = x^2 + a$  y  $F(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - bx - 9$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $3i$  es raíz de  $G$  y  $F(-3) = 0$ , elegí la opción que muestra los polinomios cociente y resto que resultan de dividir  $F$  por  $G$ .

A) Cociente:  $-18x + 144$ . Resto:  $x^2 + x - 17$

B) Cociente:  $x^2 + x - 17$ . Resto: 0

C) Cociente:  $x^2 + x - 17$ . Resto:  $-18x + 144$

D) Cociente:  $x^2 + x - 17$ . Resto: 144

Opción correcta: C)

Resolución

Si  $3i$  es raíz de  $G$ , también lo es su conjugado. Esto permite calcular que  $a = 9$ . Al evaluar  $F(-3) = 0$  se obtiene  $b = 9$ . Solo resta realizar el cociente entre ambos polinomios para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio  $P(x) = x^5 - 3x^3 - 8x^2 + 24$ . Indicá la única opción que muestra la factorización de  $P$  en  $\mathbb{C}[x]$ .

A)  $(x - 2)(x^2 + 3)(x + 1 + i\sqrt{3})(x + 1 - i\sqrt{3})$

B)  $(x - 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 1 + i\sqrt{3})(x + 1 - i\sqrt{3})$

C)  $(x - 2)(x - 3)(x + 3)(x + 1 + i\sqrt{3})(x + 1 - i\sqrt{3})$

D)  $(x - 2)(x - \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^2 + 2x + 4)$

Opción correcta: B)

Resolución

$P(X)$  puede ser factorizado por grupos:  $x^5 - 3x^3 - 8x^2 + 24 = x^3(x^2 - 3) - 8(x^2 - 3) = (x^3 - 8)(x^2 - 3)$ .

Luego, se factoriza cada uno de los polinomios:

$(x^3 - 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$  y  $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ .

Solo resta encontrar las raíces complejas de  $x^2 + 2x + 4$  para obtener la respuesta al problema.

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---