

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá  $z = \frac{9ki - 1}{i^5 + 3}$  siendo  $k \in \mathbb{R}$ . Indicá la opción que muestra el valor de  $k$  para el cual se cumple la ecuación  $Im(z) = \frac{1}{30}$ .

- A)  $-\frac{10}{27}$
- B)  $\frac{1}{54}$
- C)  $-\frac{2}{81}$
- D)  $-\frac{2}{27}$

Opción correcta: C)

Resolución

Usando que  $i^5 = i$  y realizando la división que se presenta es posible escribir a  $z$  en su forma binómica y desde allí leer que  $Im(z) = \frac{27k+1}{10}$ . A continuación, podemos plantear la condición del enunciado y despejar el valor de  $k$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá el conjunto  $A = \{z \in \mathbb{C} : (z + 1)^3 = 1\}$ . Indicá la única opción verdadera acerca de  $A$ .

- A)  $A$  tiene un elemento en el tercer cuadrante.
- B) Todos elementos de  $A$  tienen argumentos menores a  $\pi$
- C) El número  $-1 + i$  pertenece a  $A$
- D) Los elementos de  $A$  se ubican todos en el segundo y cuarto cuadrante.

Opción correcta: A)

Resolución

Lo primero que podemos observar que las raíces cúbicas de la unidad son:  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  y  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Luego nos queda que las tres soluciones de la ecuación son:  $z = 0; z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  y  $z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Graficando las soluciones se evidencia que la primera opción es verdadera y la segunda y cuarta falsa. Al reemplazar  $-1 + i$  en la ecuación nos da como resultado  $i^2 = -1$  por lo que también la tercera es una opción falsa. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá  $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$  un polinomio de grado mínimo tal que  $P(-\sqrt{5}) = 0$ ,  $i$  es raíz doble y  $P(-2) = 50$ . Elegí la única opción que muestra un polinomio  $P$  que verifica todas las condiciones enunciadas.

- A)  $P(x) = x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 5$
- B)  $P(x) = 2x^6 - 6x^4 - 18x^2 - 10$
- C)  $P(x) = x^4 - 4x^2 - 5$
- D)  $P(x) = -2x^6 + 6x^4 + 18x^2 + 10$

Opción correcta: D)

Resolución

Con las condiciones pedidas, el polinomio  $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$  puede ser escrito en forma factorizada como  $P(x) = a(x - i)^2(x + i)^2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ . El dato  $P(-2) = 50$  permite calcular el coeficiente principal  $a$  y obtener la respuesta del problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---

---

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá  $C(x)$  el polinomio cociente de la división entre  $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$  y  $Q(x) = x^2 + 1$ . Elegí la única opción que muestra el polinomio  $-2 \cdot [C(x)]^2$ .

A)  $-2x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 24x - 18$

B)  $x^2 - 2x - 3$

C)  $-2x^4 + 8x^2 + 18$

D)  $x^4 - 4x^2 - 9$

Opción correcta: A)

Resolución

El polinomio cociente de la división entre  $P$  y  $Q$  es  $x^2 - 5x + 4$ . Para obtener la respuesta hay que elevar ese polinomio al cuadrado y, luego, multiplicarlo por  $-2$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

El vector  $(0; q; r; r)$  con  $q, r \in \mathbb{R}$  es solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Elegí la única opción que indica los valores reales de  $q$  y de  $r$ .

A)  $q = -1, r = 2$

C)  $q = r = 2$

B)  $q = 2, r = -1$

D)  $q = -2r$  con  $r \in \mathbb{R}$

Opción correcta: B)

Resolución

Si triangularás el sistema y encontrás que es compatible determinado, igualando coordenada a coordenada la solución obtenida con  $(0; q; r; r)$  te permitirá obtener los valores de  $q$  y de  $r$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

---

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la matriz de  $3 \times 3$ :  $Q = \begin{pmatrix} 0 & -q & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ q^2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ . Elegí la única opción que indica el/los valores de  $q$  para el/los cual/es la matriz es inversible.

A)  $q \in \mathbb{R}$

C)  $q \neq \sqrt{3}, q \neq -\sqrt{3}$

B) Para ningún valor real de  $q$

D)  $q = \sqrt{3}, q = -\sqrt{3}$

Opción correcta: C)

Resolución

El determinante de la matriz  $Q$  es  $-3q^2 + 9$ . Esta expresión no debe anularse, caso contrario, la matriz no admitirá inversa. Esto sucede para  $|q| \neq \sqrt{3}$ . Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

---

---

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Dada la transformación  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya expresión funcional es  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + x_1, 2x_1 + 2ax_3)$ , determiná cuál de las siguientes opciones corresponde al valor de  $a$  para el cual se tiene  $Nu(T) = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$ .

A) 3

C) 1

B) -1

D) 2

Opción correcta: C)

Resolución

Como necesitamos que  $(x_3 + x_1, 2x_1 + 2ax_3) = (0, 0)$  entonces nos queda el sistema  $\begin{cases} x_3 + x_1 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$  del cual obtenemos  $(1 - a)x_1 = 0$ , con lo cual el núcleo de  $T$  tiene por base a  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$  solamente si  $a = 1$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

---

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones del plano  $T$  y  $T'$  que verifican las siguientes condiciones: ambas son dilataciones,  $T$  de factor 3 mientras que  $T'$  lo es de factor  $k \in \mathbb{R}_{<0}$  y cumplen que el determinante de la matriz asociada a  $T \circ T'$  es 144. Indicá cuál es el valor de  $k$  para el cual se verifican todas las condiciones mencionadas.

A)  $k = -4$

C)  $k = 4$

B)  $k = 9$

D)  $k = 3$

Opción correcta: A)

Resolución

Las matrices asociadas a  $T$  y  $T'$  son respectivamente  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ . Dado que su producto es  $T \circ T' = \begin{pmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 3k \end{pmatrix}$  el determinante es  $9k^2$  y debe ser igual a 144. Por lo tanto, el valor correcto es  $k = -4$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

---