UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 06/11/24 - Tema 6

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

El vector $(0;q;r;r)$ con $q,r \in \mathbb{R}$ es solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Elegí la única opción que indica los valores reales de q y de r.

A) $q = -1$, $r = 2$

B) $q = 2$, $r = -1$

C) $q = r = 2$

D) $q = -2r$ con $r \in \mathbb{R}$

Opción correcta: B)

Resolución

Si triangulás el sistema y encontrás que es compatible determinado, igualando coordenada a coordenada la solución obtenida con $(0;q;r;r)$ te permitirá obtener los valores de q y de r. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá la matriz de 3×3: $Q = \begin{pmatrix} 0 & -q & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ q^2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Elegí la única opción que indica el/los valores de q para el/los cual/es la matriz es inversible.

A) $q \in \mathbb{R}$

B) Para ningún valor real de q

C) $q \neq \sqrt{3}, q \neq -\sqrt{3}$

D) $q = \sqrt{3}, q = -\sqrt{3}$

Opción correcta: C)

Resolución

El determinante de la matriz Q es $-3q^2 + 9$. Esta expresión no debe anularse, caso contrario, la matriz no admitirá inversa. Esto sucede para $|q| \neq \sqrt{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Dada la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya expresión funcional es $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + x_1, 2x_1 + 2ax_3)$, determiná cuál de las siguientes opciones corresponde al valor de a para el cual se tiene $Nu(T) = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$.

A) 3

B) -1

C) 1

D) 2

Opción correcta: C)

Resolución

Como necesitamos que $(x_3 + x_1, 2x_1 + 2ax_3) = (0, 0)$ entonces nos queda el sistema $\begin{cases} x_3 + x_1 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$ del cual obtenemos $(1 - a)x_1 = 0$, con lo cual el núcleo de T tiene por base a $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ solamente si $a = 1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
 Considerá las transformaciones del plano T y T' que verifican las siguientes condiciones: ambas son dilataciones, T de factor 3 mientras que T' lo es de factor $k \in \mathbb{R}_{<0}$ y cumplen que el determinante de la matriz asociada a $T \circ T'$ es 144. Indicá cuál es el valor de k para el cual se verifican todas las condiciones mencionadas.

 A) $k = -4$
 B) $k = 9$
 C) $k = 4$
 D) $k = 3$

 Opción correcta: A)
 Resolución
 Las matrices asociadas a T y T' son respectivamente $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Dado que su producto es $T \circ T' = \begin{pmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 3k \end{pmatrix}$ el determinante es $9k^2$ y debe ser igual a 144. Por lo tanto, el valor correcto es $k = -4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
 Considerá $z = \dfrac{9ki - 1}{i^5 + 3}$ siendo $k \in \mathbb{R}$. Indicá la opción que muestra el valor de k para el cual se cumple la ecuación $Im(z) = \frac{1}{30}$.

 A) $-\frac{10}{27}$
 B) $\frac{1}{54}$
 C) $-\frac{2}{81}$
 D) $-\frac{2}{27}$

 Opción correcta: C)
 Resolución
 Usando que $i^5 = i$ y realizando la división que se presenta es posible escribir a z en su forma binómica y desde allí leer que $Im(z) = \frac{27k+1}{10}$. A continuación, podemos plantear la condición del enunciado y despejar el valor de k Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
 Considerá el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : (z+1)^3 = 1\}$. Indicá la única opción verdadera acerca de A.

 A) A tiene un elemento en el tercer cuadrante.
 B) Todos elementos de A tienen argumentos menores a π
 C) El número $-1 + i$ pertenece a A
 D) Los elementos de A se ubican todos en el segundo y cuarto cuadrante.

 Opción correcta: A)
 Resolución
 Lo primero que podemos observar que las raíces cúbicas de la unidad son: 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Luego nos queda que las tres soluciones de la ecuación son: $z = 0$; $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Graficando las soluciones se evidencia que la primera opción es verdadera y la segunda y cuarta falsa. Al reemplazar $-1 + i$ en la ecuación nos da como resultado $i^2 = -1$ por lo que también la tercera es una opción falsa. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio de grado mínimo tal que $P(-\sqrt{5}) = 0$, i es raíz doble y $P(-2) = 50$. Elegí la única opción que muestra un polinomio P que verifica todas las condiciones enunciadas.

A) $P(x) = x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 5$

B) $P(x) = 2x^6 - 6x^4 - 18x^2 - 10$

C) $P(x) = x^4 - 4x^2 - 5$

D) $P(x) = -2x^6 + 6x^4 + 18x^2 + 10$

Opción correcta: D)

Resolución

Con las condiciones pedidas, el polinomio $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ puede ser escrito en forma factorizada como $P(x) = a(x-i)^2(x+i)^2(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$. El dato $P(-2) = 50$ permite calcular el coeficiente principal a y obtener la respuesta del problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá $C(x)$ el polinomio cociente de la división entre $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ y $Q(x) = x^2 + 1$. Elegí la única opción que muestra el polinomio $-2 \cdot [C(x)]^2$.

A) $-2x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 24x - 18$

B) $x^2 - 2x - 3$

C) $-2x^4 + 8x^2 + 18$

D) $x^4 - 4x^2 - 9$

Opción correcta: A)

Resolución

El polinomio cociente de la división entre P y Q es $x^2 - 5x + 4$. Para obtener la respuesta hay que elevar ese polinomio al cuadrado y, luego, multiplicarlo por -2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
