UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 06/11/24 - Tema 2

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Elegí la única opción que muestra el conjunto solución del siguiente sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

A) $\{(-1; 0; 1; 1)\}$

B) $\{(1; 1; 0; 0) + \alpha(-1; 0; 1; 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$

C) $\{(1; 1; 0; 0)\}$

D) $\{(-1; 0; 1; 1) + \alpha(1; 1; 0; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

Opción correcta: B)

Resolución

Si escribís el sistema y lo triangulás, obtenés la solución propuesta. Un posible recorrido es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right) \times(-1) \underset{F_3 - 1\cdot F_1 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \times(-1) \underset{F_3 - 1\cdot F_2 \to F_3}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

De la matriz triangulada, podés escribir el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 2 \\ \quad\;\; 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - 2\cdot x_4 = 2 \\ \qquad\qquad -4\cdot x_3 + 4\cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

Y despejar todo en función de x_4. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

A, B, C son matrices de 3×3 tales que: $det(B) = 8$, $A = BC + 7B$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz A.

A) 7056 B) 882 C) 49 D) 448

Opción correcta: A)

Resolución

Como la matriz B es un factor común en la igualdad $A = BC + 7B$, podés expresar dicha matriz como $A = B(C + 7 \cdot I)$. Y, luego, aplicando las propiedades de los determinantes, podés calcular: $det(A) = det(B) \cdot det(C + 7 \cdot I) = 7056$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Indicá cuál es la fórmula de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que tiene $\text{Im}(T) = \langle(1, 1, 0)\rangle$ y $\text{Nu}(T) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_2 + 6x_1 = 0\}$.

A) $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, x_2 + 3x_1, 0)$

B) $T(x_1, x_2) = (x_2 + 3x_1, x_2 + 3x_1, 0)$

C) $T(x_1, x_2) = (x_2 + 3x_1, x_2 + 3x_1)$

D) $T(x_1, x_2) = (x_2 + 3x_1, x_2 - 3x_1, 0)$

Opción correcta: B)

Resolución

Como tenemos que $\text{Nu}(T) = \langle(1, -3)\rangle$ entonces $T(1, -3) = (0, 0, 0)$ y podemos hacer $T(0, 1) = (1, 1, 0)$ entonces haciendo $(x_1, x_2) = \alpha(1, -3) + \beta(0, 1)$ tenemos que $\alpha = x_1$ y $\beta = x_2 + 3x_1$ de donde obtenemos $T(x_1, x_2) = (x_2 + 3x_1, x_2 + 3x_1, 0)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Considerá las transformaciones del plano T y T' que verifican las siguientes condiciones: T es una homotecia de factor $k \in \mathbb{R}_{>1}$, T' es una traslación, al aplicar $T \circ T'$ el círculo de centro (0,0) y radio 1 es transformado en el círculo de centro (-2,-2) y radio 3. Indicá cuál es el valor real de k para el cual se verifican todas las condiciones mencionadas.

  A) $k = 0$ B) $k = 1$ C) $k = 2$ D) $k = 3$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Dado que una traslación no modifica el radio de un círculo este debe ser modificado por la homotecia, y como el radio se ve multiplicado por 3 este debe ser el valor de k. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que cumple la ecuación $\dfrac{-3z - 5i + 2\overline{z}}{2Im(z)} = 9$. Indicá la única opción verdadera.

  A) z se ubica en el primer cuadrante.
  B) La parte real de z es un número negativo.
  C) z tiene parte imaginaria nula.
  D) z se ubica en el cuarto cuadrante.

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Escribiendo al número complejo z en su forma binómica como $z = a+bi$, realizando las operaciones y reagrupando parte real y parte imaginaria se puede llegar a la igualdad: $(-a-18b)+(-5b-5)i = 0$. Desde aquí, se deduce que $a = 18$ y $b = -1$; por lo que $z = 18 - i$ es la solución de la ecuación dada; y, la única opción verdadera es la última. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Indicá la opción que muestra el módulo y argumento del número complejo

$$z = \frac{i^6 \cdot (-5 - 5i)^5}{Re(-2 + i) \cdot (10 - 10i)}$$

.

  A) $|z| = 625$ y $arg(z) = \pi$
  B) $|z| = 625$ y $arg(z) = \frac{\pi}{2}$
  C) $|z| = \frac{1}{2}$ y $arg(z) = \frac{\pi}{2}$
  D) $|z| = 3125\sqrt{2}$ y $arg(z) = \frac{\pi}{2}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Para hallar el $|z|$ se puede usar las propiedades de los módulos para plantear y resolver el siguiente cálculo: $\dfrac{|i|^6 \cdot |-5 - 5i|^5}{|-2| \cdot |10 - 10i|} = 625$. Y, para averiguar el argumento de z, usamos el Teorema de De Moivre para deducir que, como $[arg(i^6) + 5arg(-5 - 5i)] - [arg(-2) + arg(10 - 10i)] = \frac{9\pi}{2}$, el argumento de z será $\frac{\pi}{2}$ Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 7x + 14$. Si i es raiz de P, elegí la opción que muestra su factorización en $\mathbb{C}$.

A) $(x-2)(x^2+7)(x^2+1)$

B) $(x-2)(x^2-7)(x-i)(x+i)$

C) $(x-2)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x-i)(x+i)$

D) $(x-2)(x-\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x^2+1)$

Opción correcta: C)
Resolución
Como i es raiz de P también es raiz $-i$. Luego $(x-i)(x+i) = x^2+1$ divide a P. Entonces $P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 7x + 14 = (x^3 - 2x^2 - 7x + 14)(x-i)(x+i)$. Por el lema de Gauss se obtiene que $x = 2$ es raiz de P. Luego: $P(x) = (x^2-7)(x-2)(x-i)(x+i)$. De esta última expresión se obtiene la factorización buscada sabiendo que $x = \sqrt{7}$ y $x = -\sqrt{7}$ también son raíces de P. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra los polinomios cociente y resto que resultan de dividir
$P(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x - 7$ por $Q(x) = x^2 + 2x - 4$.

A) Cociente: $-38x + 49$. Resto: $x^3 + 2x^2 - 3x + 14$

B) Cociente: $x^3 + 2x^2 - 3x + 14$. Resto: $38x - 49$

C) Cociente: $x^3 - 2x^2 + 3x - 14$. Resto: $x^2 + 2x - 4$

D) Cociente: $x^3 + 2x^2 - 3x + 14$. Resto: $-38x + 49$

Opción correcta: D)
Resolución
El cociente y el resto de dividir P por Q se obtienen por medio del algoritmo de la división. En particular, se puede comprobar que $(x^3 + 2x^2 - 3x + 14)(x^2 + 2x - 4) + (-38x + 49) = x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x - 7$ Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
