

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Elegí la única opción que muestra el conjunto solución del siguiente sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 3x_3 - 3x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

A) $\{(0; -1; 1; 1)\}$

C) $\{(\frac{1}{4}; 5; -\frac{3}{4}; 0)\}$

B) $\{(0; -1; 1; 1) + \alpha(\frac{1}{4}; 5; -\frac{3}{4}; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

D) $\{(\frac{1}{4}; 5; -\frac{3}{4}; 0) + \alpha(0; -1; 1; 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$

Opción correcta: D)

Resolución

Si escribís el sistema y lo triangulás, obtenés la solución propuesta. Un posible recorrido es:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 3 & -2 & | & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -3 & | & -3 \\ 3 & 1 & 5 & -4 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times (3) \\ F_2 - (-3) \cdot F_1 \rightarrow F_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 3 & -2 & | & 3 \\ 0 & 3 & 12 & -9 & | & 6 \\ 3 & 1 & 5 & -4 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times (-3) \\ F_3 - 3 \cdot F_1 \rightarrow F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 3 & -2 & | & 3 \\ 0 & 3 & 12 & -9 & | & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & | & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times (\frac{2}{3}) \\ F_3 - (-\frac{2}{3}) \cdot F_2 \rightarrow F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & | & 3 \\ 0 & 3 & 12 & -9 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & | & -3 \end{pmatrix}$$

De la matriz triangulada, podés escribir el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_2 + 12x_3 - 9x_4 = 6 \\ 4x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$$

Y despejar todo en función de x_4 . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

A, B, C son matrices de 3×3 tales que: $\det(B) = 9$, $A = 4B + BC$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz A .

A) 86

B) 34

C) 774

D) 342

Opción correcta: C)

Resolución

Como la matriz B es un factor común en la igualdad $A = 4B + BC$, podés expresar dicha matriz como $A = B(4 \cdot I + C)$. Y, luego, aplicando las propiedades de los determinantes, podés calcular: $\det(A) = \det(B) \cdot \det(4 \cdot I + C) = 774$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Indicá cuál es la fórmula de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tiene $\text{Im}(T) = \langle (1, 0, 1) \rangle$ y $\text{Nu}(T) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - 3x_1 = 0\}$.

A) $T(x_1, x_2) = (x_2 + 3x_1, 0, x_2 - 3x_1)$

C) $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, 0, x_2 - 3x_1)$

B) $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, 0, x_2 + 3x_1)$

D) $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, x_2 - 3x_1)$

Opción correcta: C)

Resolución

Como tenemos que $\text{Nu}(T) = \langle (1, 3) \rangle$ entonces $T(1, 3) = (0, 0, 0)$ y podemos hacer $T(0, 1) = (1, 0, 1)$ entonces haciendo $(x_1, x_2) = \alpha(1, 3) + \beta(0, 1)$ tenemos que $\alpha = x_1$ y $\beta = x_2 - 3x_1$ de donde obtenemos $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, 0, x_2 - 3x_1)$. Estos contenidos los encontrás en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones del plano T y T' que verifican las siguientes condiciones: T es una traslación, T' es una homotecia de factor $k \in \mathbb{R}_{>1}$, al aplicar $T \circ T'$ el círculo de centro $(0,0)$ y radio 1 es transformado en el círculo de centro $(1,1)$ y radio 2. Indicá cuál es el valor de k para el cual se verifican todas las condiciones mencionadas.

A) $k = 0$

B) $k = 1$

C) $k = 2$

D) $k = 3$

Opción correcta: C)

Resolución

Dado que una traslación no modifica el radio de un círculo este debe ser modificado por la homotecia, y como el radio se ve multiplicado por 2 este debe ser el valor de k . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá $z \in \mathbb{C}$ tal que cumple la ecuación $\frac{z + 2\bar{z} + 1}{2\operatorname{Re}(z)} = 3i$. Indicá la única opción verdadera.

A) La parte real de z es un número positivo.

B) z se ubica en el segundo cuadrante.

C) z tiene parte imaginaria nula.

D) z se ubica en el tercer cuadrante.

Opción correcta: B)

Resolución

Escribiendo al número complejo z en su forma binómica como $z = a + bi$, realizando las operaciones y reagrupando parte real y parte imaginaria se puede llegar a la igualdad: $(3a + 1) + (-b - 6a)i = 0$. Desde aquí, se deduce que $a = -\frac{1}{3}$ y $b = 2$; por lo que $z = -\frac{1}{3} + 2i$ es la solución de la ecuación dada; y, la única opción verdadera es la segunda. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra el módulo y argumento del número complejo

$$z = \frac{i^6 \cdot (3 - 3i)^5}{\operatorname{Re}(-9 + i) \cdot (9 - 9i)}$$

A) $|z| = 12$ y $\arg(z) = \pi$

B) $|z| = 12$ y $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

C) $|z| = 24$ y $\arg(z) = \pi$

D) $|z| = \frac{1}{81}$ y $\arg(z) = \pi$

Opción correcta: A)

Resolución

Para hallar el $|z|$ se puede usar las propiedades de los módulos para plantear y resolver el siguiente cálculo: $\frac{|i|^6 \cdot |3 - 3i|^5}{|-9| \cdot |9 - 9i|} = 12$. Y, para averiguar el argumento de z , usamos el Teorema de De Moivre para deducir que, como $[\arg(i^6) + 5\arg(3 - 3i)] - [\arg(-9) + \arg(9 - 9i)] = 7\pi$, el argumento de z será π . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 5x + 20$. Si $-i$ es raíz de P , elegí la opción que muestra su factorización en $\mathbb{C}$.

- A) $(x - 4)(x^2 + 5)(x^2 + 1)$
- B) $(x - 4)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - i)(x + i)$
- C) $(x - 4)(x^2 - 5)(x - i)(x + i)$
- D) $(x - 4)(x - \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x^2 + 1)$

Opción correcta: B)

Resolución

Como $-i$ es raíz de P también es raíz i . Luego $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ divide a P . Entonces $P(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 5x + 20 = (x^3 - 4x^2 - 5x + 20)(x - i)(x + i)$. Por el lema de Gauss se obtiene que $x = 4$ es raíz de P . Luego: $P(x) = (x^2 - 5)(x - 4)(x - i)(x + i)$. De esta última expresión se obtiene la factorización buscada sabiendo que $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$ también son raíces de P . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra los polinomios cociente y resto que resultan de dividir $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x - 9$ por $Q(x) = x^2 - 2x + 5$.

- A) Cociente: $x^3 - x^2 - 5x - 5$. Resto: $16x + 16$
- B) Cociente: $x^3 - x^2 - 5x - 5$. Resto: $-16x - 16$
- C) Cociente: $x^3 + x^2 + 5x + 5$. Resto: $x^2 - 2x + 5$
- D) Cociente: $16x + 16$. Resto: $x^3 - x^2 - 5x - 5$

Opción correcta: A)

Resolución

El cociente y el resto de dividir P por Q se obtienen por medio del algoritmo de la división. En particular, se puede comprobar que $(x^3 - x^2 - 5x - 5)(x^2 - 2x + 5) + (16x + 16) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x - 9$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
