UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 06/11/24 - Tema 11

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

  Considerá los números complejos: z_1, de módulo $\sqrt{5}$ y argumento $\frac{\pi}{5}$ y z_2 que se ubica en el primer cuadrante del plano, tiene módulo 1 y cumple la ecuación $Im(z_2) = \sqrt{3}Re(z_2)$. Indicá la opción que muestra el argumento de $w = {z_1}^3 \cdot i \cdot {z_2}^2$.

  A) $\dfrac{53\pi}{30}$

  B) $\dfrac{43\pi}{30}$

  C) $\dfrac{14\pi}{15}$

  D) $\dfrac{\pi^5}{1125}$

  Opción correcta: A)

  Resolución

  Para calcular el argumento de w podemos usar el teorema de De Moivre, de donde se desprende que el argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores; con el ajuste correspondiente en $[0, 2\pi)$. En este caso, como el argumento de z_1 es dato nos queda que $arg({z_1}^3) = 3 \cdot \frac{\pi}{5}$. El argumento de z_2 lo podemos calcular usando que $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}Re(z_2)}{Re(z_2)}\right) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3})$, por lo que dicho argumento es $\frac{\pi}{3}$. Como el argumento del complejo i es $\frac{\pi}{2}$; nos queda que $w = \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{53\pi}{30}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

  Indicá la única opción que muestra el conjunto solución de la ecuación $z \cdot \overline{5i\overline{z}} + 4z^3 = z$.

  A) $\{0; i; -i\}$

  B) $\{0; i; -\frac{i}{4}\}$

  C) $\{\frac{i}{4}; -\frac{1}{2}\}$

  D) $\{0; i; \frac{i}{4}\}$

  Opción correcta: D)

  Resolución

  Podemos reescribir a la ecuación dada como $z^2 \cdot (-5i) + 4z^3 - z = 0$.Lo primero a observar es que $z = 0$ es una de la soluciones, y además, sacando factor común z, nos queda una ecuación de segundo grado, $4z^2 - 5iz - 1 = 0$ de la cual podemos deducir las dos soluciones restantes. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

  Elegí la opción que muestra el conjunto solución en $\mathbb{C}$ de la ecuación: $x^3(x+1) = 3x^2 + 4(x+1)$.

  A) $S = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

  B) $S = \{-2; 2\}$

  C) $S = \left\{-2; 2; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

  D) $S = \{0; -1\}$

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Si se aplica la propiedad distributiva y se iguala a cero la expresión $x^3(x+1) = 3x^2 + 4(x+1)$ se obtiene la ecuación polinómica $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$. Por el lema de Gauss se pueden obtener las raíces $x = -2$ y $x = 2$. Si se factoriza el polinomio obtenido a partir de estas raíces, se lo puede reescribir como $(x+2)(x-2)(x^2+x+1)$. Solo resta buscar las raíces del polinomio cuadrático para encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
Considerá los polinomios $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 16x - c$ y $g(x) = x^2 - 2x - 7$, donde $c \in \mathbb{R}$. Si se sabe que $f(x)$ es divisible por $(x+2)$, elegí la única opción que muestra el polinomio resto de la división entre $f(x)$ por $g(x)$.

A) $49x + 89$

B) -9

C) $x^2 + 5x + 15$

D) 0

Opción correcta: A)
Resolución
Como $x+2$ divide a f luego $f(-2) = 0$. Esta ecuación permite hallar $c = 16$. Con este dato, solo resta hacer el cociente entre f y g para encontrar el polinomio resto de esa división. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Considerá las siguientes matrices de 3×3: $A = \begin{pmatrix} 3 & q & 1 \\ q & r & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$. Elegí la única opción que muestra los valores reales de r y de q de manera tal que se verifique que: $A \cdot B = C$.

A) $r = -4; q = -2$

B) $r = 4; q = 2$

C) $r = -4; q = 2$

D) $r = 4; q = -2$

Opción correcta: D)
Resolución
Si se realiza el producto entre las matrices $A \cdot B$ se obtiene $\begin{pmatrix} -2q + 7 \\ q - 2r + 20 \\ 8 \end{pmatrix}$. Al igualar esta matriz a C, se pueden obtener los valores de r y q. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Considerá las matrices A, B, C, D de 3×3:
$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Si $D = C^{-1} \cdot A + 2B^t$, elegí la opción que muestra el los coeficientes d_{32} y d_{23} de D.

A) $d_{32} = -1$ y $d_{23} = -19$

B) $d_{32} = -1$ y $d_{23} = 19$

C) $d_{32} = -19$ y $d_{23} = -1$

D) $d_{32} = 1$ y $d_{23} = -19$

Opción correcta: A)
Resolución
Para obtener la matriz D, tenés que calcular C^{-1}, multiplicar a esa matriz por A y luego sumarle la matriz que resulta de multiplicar por 2 a la traspuesta de la matriz B. Luego deberás detectar los coeficientes pedidos y buscar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Dada la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya expresión funcional es $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + x_1, 2x_1 + 2ax_3)$, determiná cuál de las siguientes opciones corresponde al valor de a para el cual se tiene $\dim(Im(T)) = 1$.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Opción correcta: C)

Resolución

Calculando el núcleo de $(x_3 + x_1, 2x_1 + 2ax_3) = (0, 0)$ nos queda el sistema $\begin{cases} x_3 + x_1 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$ del cual obtenemos $(1 - a)x_1 = 0$. Por el teorema de la dimensión sabemos que $\dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Img}(T)) = 3$, entonces tiene que ser $\dim(\text{Nu}(T))$= 2 y esto solamente puede ocurrir si $a = 1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

T' es una dilatación del plano de factor $|k|$ tal que $Im(k) \in \mathbb{R}_{>0}$ mientras que T es una rotación de ángulo $\frac{3\pi}{2}$. Ambas transformaciones cumplen que el determinante de la matriz asociada a $T^{-1} \circ T'$ es -9. Indicá cuál es el valor de k para el cual se verifican todas las condiciones mencionadas.

A) $k = -3$

B) $k = 3$

C) $k = -3i$

D) $k = 3i$

Opción correcta: D)

Resolución

Las matrices asociadas a T y T' son respectivamente $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} |k| & 0 \\ 0 & |k| \end{pmatrix}$. Entonces la matriz asociada a T^{-1} es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Dado que su producto es $T^{-1} \circ T' = \begin{pmatrix} 0 & -|k| \\ |k| & 0 \end{pmatrix}$ el determinante es $|k|^2 = k^2$ con lo cual $k^2 = -9$ y por lo tanto el valor correcto es $k = 3i$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.
