UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 06/11/24 - Tema 10

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá las siguientes matrices de 3×3: $M = \begin{pmatrix} -3 & t & 4 \\ 1 & p & t \\ p & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}$. Elegí la única opción que muestra los valores reales de t y de p de manera tal que se verifique que: $M \cdot N = P$.

A) $t = 2; p = -1$

B) $t = -2; p = -1$

C) $t = -2; p = 1$

D) $t = 2; p = 1$

Opción correcta: A)

Resolución

Si se realiza el producto entre las matrices $M \cdot N$ se obtiene $\begin{pmatrix} 3t + 10 \\ 3p + t - 2 \\ -2p + 14 \end{pmatrix}$. Al igualar esta matriz a P, se pueden obtener los valores de t y p. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá las matrices A, B, C, D de 3×3:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Si $D = C^{-1} \cdot A + 3B^t$, elegí la opción que muestra el los coeficientes d_{31} y d_{13} de D.

A) $d_{31} = 11$ y $d_{13} = 15$

B) $d_{31} = 11$ y $d_{13} = -15$

C) $d_{31} = 15$ y $d_{13} = 11$

D) $d_{31} = 15$ y $d_{13} = -11$

Opción correcta: C)

Resolución

Para obtener la matriz D, tenés que calcular C^{-1}, multiplicar a esa matriz por A y luego sumarle la matriz que resulta de multiplicar por 3 a la traspuesta de la matriz B. Luego deberás detectar los coeficientes pedidos y buscar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Dada la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya expresión funcional es $T(x_1, x_2, x_3) = (ax_3 + x_1, x_1 - x_3)$, determiná cuál de las siguientes opciones corresponde al valor de a para el cual se tiene $\dim(Im(T)) = 1$.

A) 2

B) -1

C) 1

D) -2

Opción correcta: B)

Resolución

Calculando el núcleo de $(ax_3 + x_1, x_1 - x_3) = (0, 0)$ nos queda el sistema $\begin{cases} ax_3 + x_1 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ del cual obtenemos $(a + 1)x_1 = 0$. Por el teorema de la dimensión sabemos que $\dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$, entonces tiene que ser $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 2$ y esto solamente puede ocurrir si $a = -1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
T' es una dilatación del plano de factor $|k|$ tal que $Im(k) \in \mathbb{R}_{<0}$ mientras que T es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$. Ambas transformaciones cumplen que el determinate de la matriz asociada a $T^{-1} \circ T'$ es -16. Indicá cuál es de k para el cual se verifican todas las condiciones mencionadas.

A) $k = -4$

B) $k = 4$

C) $k = -4i$

D) $k = i$

Opción correcta: C)
Resolución
Las matrices asociadas a T y T' son respectivamente $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} |k| & 0 \\ 0 & |k| \end{pmatrix}$. Entonces la matriz asociada a T^{-1} es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Dado que su producto es $T^{-1} \circ T' = \begin{pmatrix} 0 & |k| \\ -|k| & 0 \end{pmatrix}$ el determinante es $|k|^2 = k^2$ con lo cual $k^2 = -16$ y por lo tanto el valor correcto es $k = -4i$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Considerá los números complejos: z_1, de módulo $\sqrt{6}$ y argumento $\frac{\pi}{13}$ y z_2 que se ubica en el primer cuadrante del plano, tiene módulo 1 y cumple la ecuación $Re(z_2) = \sqrt{3} Im(z_2)$. Indicá la opción que muestra el argumento de $w = {z_1}^3 \cdot i \cdot {z_2}^2$.

A) $\dfrac{109\pi}{78}$

B) $\dfrac{83\pi}{78}$

C) $\dfrac{22\pi}{39}$

D) $\dfrac{3\pi^5}{676}$

Opción correcta: B)
Resolución
Para calcular el argumento de w podemos usar el teorema de De Moivre, de donde se desprende que el argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores; con el ajuste correspondiente en $[0, 2\pi)$. En este caso, como el argumento de z_1 es dato nos queda que $arg({z_1}^3) = 3 \cdot \frac{\pi}{13}$. El argumento de z_2 lo podemos calcular usando que $arctg\left(\dfrac{Im(z_2)}{\sqrt{3} Im(z_2)}\right) = arctg\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, por lo que dicho argumento es $\frac{\pi}{6}$. Como el argumento del complejo i es $\frac{\pi}{2}$; nos queda que $w = \dfrac{3\pi}{13} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{83\pi}{78}$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Indicá la única opción que muestra el conjunto solución de la ecuación $z \cdot \overline{10iz} + 9z^3 = z$.

A) $\{0; i; -i\}$

B) $\{\frac{i}{9}; -\frac{i}{9}\}$

C) $\{0; i; \frac{i}{9}\}$

D) $\{0; \frac{4}{9} + \frac{5}{9}i; -\frac{4}{9} + \frac{5}{9}i\}$

Opción correcta: C)
Resolución
Podemos reescribir a la ecuación dada como $z^2 \cdot (-10i) + 9z^3 - z = 0$.Lo primero a observar es que $z = 0$ es una de la soluciones, y además, sacando factor común z, nos queda una ecuación de segundo grado, $9z^2 - 10iz - 1 = 0$, de la cual podemos deducir las dos soluciones restantes. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra el conjunto solución en $\mathbb{C}$ de la ecuación: $x^3(x+1) = 7x^2 + 9(x+2)$.

  A) $S = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}\right\}$

  B) $S = \left\{-3; 3; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}\right\}$

  C) $S = \{-3; 3\}$

  D) $S = \{0; -1; -2\}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Si se aplica la propiedad distributiva y se iguala a cero la expresión $x^3(x+1) = 7x^2 + 9(x+2)$ se obtiene la ecuación polinómica $x^4 + x^3 - 7x^2 - 9x - 18 = 0$. Por el lema de Gauss se pueden obtener las raíces $x = -3$ y $x = 3$. Si se factoriza el polinomio obtenido a partir de estas raíces, se lo puede reescribir como $(x+3)(x-3)(x^2+x+2)$. Solo resta buscar las raíces del polinomio cuadrático para encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá los polinomios $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 15x - b$ y $g(x) = x^2 + 3x - 8$, donde $b \in \mathbb{R}$. Si se sabe que $f(x)$ es divisible por $(x+4)$, elegí la única opción que muestra el polinomio resto de la división entre $f(x)$ por $g(x)$.

  A) 0

  B) 284

  C) $x^2 - 7x + 27$

  D) $-122x - 204$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Como $x+4$ divide a f luego $f(-2) = 0$. Esta ecuación permite hallar $b = 420$. Con este dato, solo resta hacer el cociente entre f y g para encontrar el polinomio resto de esa división. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
