UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Recuperatorio 2do. parcial - 12/06/2024 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Considerá los complejos $w = -1 - i$ y $z = 1 - \sqrt{3}i$.
  Elegí la opción que muestra el resultado de $w^{-3} \cdot z^{10}$.

  A) $256\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
  B) $256\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
  C) $1024\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$
  D) $256\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

  Opción correcta: D)
  Resolución: para resolver el cálculo $w^{-3} \cdot z^{10}$ es conveniente escribir en forma polar cada uno de los complejos:
  $w = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \to w^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
  $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) \to z^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
  $w^{-3} \cdot z^{10} = 256\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  Considerá $z \in \mathbb{C}$. Elegí la única opción que contiene una de las soluciones de la ecuación $z - 10i = 21z^{-1}$.

  A) $-7i$ B) $3i$ C) $\frac{10i+4}{2}$ D) $-3i$

  Opción correcta: B)
  Resolución: la ecuación $z - 10i = 21z^{-1}$ puede ser escrita como $z^2 - 10iz - 21 = 0$. Al ser una ecuación cuadrática de coeficientes complejos, se pueden calcular la soluciones mediante la fórmula resolvente: $\frac{10i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10i \pm 4i}{2}$ y obtener que las soluciones son $3i$ y $7i$. Una de ellas es la que se ofrece como opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Considerá los polinomios $P(x) = x^4 - 3kx^2 + 5x - 27k$, con $k \in \mathbb{R}$; $Q(x) = x^2 - 5x + 9$ y $R(x) = -20x - 144$. Indicá el valor de k para que el resto de dividir a P por Q sea R.

  A) $k = 4$ B) $k = 1$ C) $k = -1$ D) $k = 7$

  Opción correcta: A)
  Resolución: al realizar la división de P por Q se obtiene como resto al polinomio $(-15k+24)x-144$, como este debe coincidir con R, igualando coeficientes obtendremos que el valor de k debe ser $k = 4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Sea P el polinomio de mínimo grado, con coeficientes reales que tiene a $-1 + 2i$ como una de sus raíces con multiplicidad 2; $x = -3$ como raíz simple y $x = 0$ como raíz triple. Indicá cuál debe ser su coeficiente principal para que se cumpla que $P(2i) = -6 + 61i$

  A) $\frac{1}{2}$ B) -2 C) $\frac{1}{8}$ D) $-\frac{1}{64}$

  Opción correcta: C)
  Resolución: con los datos del problema, se puede deducir que un polinomio de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas debe ser $P = a(x - (-1 + 2i))^2(x - (-1 - 2i))^2(x + 3)x^3$, dado que al tener coeficientes reales, también tendremos como raíz doble a $-1 - 2i$. El coeficiente principal a, lo obtenemos del dato $P(2i) = -6 + 61i$ y despejando de esta ecuación el valor de a. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = -2A \cdot B^t \cdot C^{-1}$ Elegí la única opción que muestra el valor del coeficiente d_{21}.

A) $d_{21} = \frac{35}{2}$
B) $d_{21} = -\frac{35}{4}$
C) $d_{21} = 16$
D) $d_{21} = 6$

Opción correcta: D)
Resolución:

$$-2A \cdot B^t \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

La matriz solicitada $D = \begin{pmatrix} 26 & -6 & 34 \\ 8 & 12 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ por lo que el coeficiente $d_{21} = 8 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{2} + (-8) \cdot \frac{1}{2} = 6$ Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Indicá cuál es la única opción que muestra su conjunto solución.

A) $\left\{X \in \mathbb{R}^3 : X = t\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right), t \in \mathbb{R}\right\}$
B) $\left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)\right\}$
C) $\left\{X \in \mathbb{R}^3 : X = t\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right) + \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right), t \in \mathbb{R}\right\}$
D) $\{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}\}$

Opción correcta: C)
Resolución: si el sistema dado se resuelve en forma matricial y se triangula la matriz ampliada, se obtiene $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Al reescribir este sistema, se obtienen dos ecuaciones con tres incógnitas. De la segunda ecuación se obtiene $y = \frac{4}{5}z + \frac{1}{5}$. Al reemplazarla en la primera ecuación, se obtiene $x = \frac{3}{5}z + \frac{2}{5}$. Luego, todo punto solución del sistema es de la forma $\left(\frac{3}{5}z + \frac{2}{5}, \frac{4}{5}z + \frac{1}{5}, z\right)$ siendo $z \in \mathbb{R}$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 9.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x; y) = (x + y; x - 3y)$. Elegí la opción que muestra la dimensión de $\mathrm{Im}(T^{-1})$.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

Opción correcta: C)
Resolución: dado que T en su forma matricial es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ Entonces $A_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
Para conocer la dimensión de la imagen nos basta con triangular A_T^{-1}, lo que nos da $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. con lo cual concluimos que la dimensión de la imagen de T es 2. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x; y; z) = (x+3y+z; x-2y-z; 2x+y)$. Elegí la opción que muestra la dimensión de $\mathrm{Nu}(T)$.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Opción correcta: B)

Resolución: dado que T en su forma matricial es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Para conocer la dimensión del núcleo nos basta con triangular A_T, lo que nos da $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con lo cual concluimos que la dimensión de la imagen de T es 2. Entonces por el teorema de la dimensión debe ser que la dimensión del núcleo es 1. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.