UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 12/06/2024 - Tema 6

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Elegí la única afirmación verdadera.

A) Solo las matrices A y C son invertibles.

B) La matriz C es la única invertible.

C) Todas son invertibles.

D) Ninguna de ellas es invertible.

Opción correcta: D)

Resolución: la matriz A no es invertible porque no es cuadrada.La matriz $B \in \mathbb{R}^{4x4}$ posee dos columnas iguales por lo que $\det(B) = 0$. Por último se puede verificar que $\det(C) = 0$. Por todo lo analizado afirmamos que ninguna de las matrices poseerá inversa. Estos contenidos los podés encontrar en la unidad 9.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá el sistema $\begin{cases} 2x + 2y - 2kz = 2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 5y + k^2 z = k^2 \end{cases}$ Elegí la única afirmación verdadera.

A) Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado .

B) Si $k = -1$ el sistema es incompatible.

C) Si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

D) Si $k = -2$ el sistema es compatible determinado.

Opción correcta: C)

Resolución: este problema se resuelve utilizando el método de triangulación de Gauss. Se puede reescribir el sistema $\begin{cases} 2x + 2y - 2kz = 2 \\ y + (k+1)z = -1 \\ (k^2 + k - 2)z = k^2 - 1 \end{cases}$ podrás comprobar que con $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado, con $k = -2$ el sistema es incompatible, y con cualquier otro valor de $k \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado .Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que una base de la imagen es $\{(1, -1, 2), (1, 1, 1), (-1, -1, 2)\}$. Elegí la opción que representa una fórmula de T.

A) $T(x, y, z) = (x + z, -x - y - z, 2x + y + 2z)$

B) $T(x, y, z) = (x + y - z, -x + y - z, 2x + y + 2z)$

C) $T(x, y, z) = (x + 2y - 3z, -x + y - z, 2x + y - 2z)$

D) $T(x, y, z) = (x + y - z, x + 3z, 2x + y + 2z)$

Opción correcta: B)

Resolución: observamos que: $T(x, y, z) = (x + y - z, -x + y - z, 2x + y + 2z)$
$T(x, y, z) = x(1, -1, 2) + y(1, 1, 1) + z(-1, -1, 2)$, entonces esa T es la única generada por la base de la imagen. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá la matriz asociada $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & k & 2k \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix}$ la cual está asociada a una $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Indicá la opción que muestra todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple que $T(-1; 2; -1) = (1, 0; -2)$

A) $k = 2$ B) $k = 1$ C) $k = -1$ D) $k = -2$

Opción correcta: B)

Resolución: realizando el producto $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & k & 2k \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k-3 \end{pmatrix}$
tenemos que $k - 3 = -2$, por lo tanto $k = 1$.
Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

S es el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{z^3+3}{i} = 122i$. Elegí la única afirmación verdadera.

A) El conjunto S tiene cuatro elementos.

B) La suma de todos los elementos de S es 0.

C) El conjunto S no contiene números reales.

D) Uno de los elementos de S es un complejo imaginario puro.

Opción correcta: B)

Resolución: si resolvés la ecuación $\frac{z^3+3}{i} = 122i$ vas a llegar a la ecuación equivalente $z^3 = -125$. Las soluciones de esta ecuación son: -5, $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}i$ y $\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3}i$. Si analizás cada una de las opciones ofrecidas, la única verdadera es que todos los elementos de S suman 0. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá los complejos $z_1 = 4 - 6i$ y $z_2 = -2 + 3i$. Elegí la opción que muestra el módulo del complejo $\dfrac{(z_1)^2}{(z_2)^3}$.

A) $\dfrac{16}{13}$ B) $\dfrac{20}{13}$ C) $\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$ D) $4\sqrt{13}$

Opción correcta: C)

Resolución: para calcular el módulo del complejo pedido, primero podés resolver los siguientes cálculos: $(4-6i)^2 = -20 - 48i$ y $(-2+3i)^3 = 46 + 9i$. A continuación realizás el cociente $\frac{-20-48i}{46-9i}$ y obtenés $-\frac{8}{13} - \frac{12}{13}i$. A este complejo le calculás el módulo y obtenés la respuesta pedida. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra el valor de $a \in \mathbb{R}$ de manera tal que $x = -5$ sea raíz múltiple del polinomio $P(x) = (x^3 + 2x^2 - 55x - 15a)(2x - 30a)$.

A) $-\dfrac{1}{3}$ B) $-\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{40}{3}$ D) $\dfrac{1}{6}$

Opción correcta: C)

Resolución: como $x = -5$ debe ser raíz P, entonces $P(-5) = 0$, planteando esto podemos deducir que existen dos valores de a posibles: $a = \frac{40}{3}$ y $a = -\frac{1}{3}$. Sin embargo, solo con el primero de estos valores se cumple que -5 es raíz múltiple. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^4 - 19x^2 + 48$. Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única correcta.

A) Todas las raíces de P son racionales.

B) P no tiene raíces reales.

C) P solo tiene dos raíces no racionales.

D) La suma de las raíces de P es igual a 6.

Opción correcta: C)
Resolución: para el P dado, podemos usar el Teorema de Gauss y deducir que -4 y 4 son raíces de P, dividiendo ahora por $(x-4)$ y luego por $(x+4)$ obtenemos (x^2-3).
Entonces, $P(x) = (x-4)(x+4)(x^2-3)$, cuyo último factor no tiene raíces racionales puesto que estas son $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Obtuvimos entonces las cuatro raíces de P, vemos que su suma es cero, y solo dos de ellas son números no racionales. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.