UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 12/06/2024 - Tema 5

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

Elegí la única afirmación verdadera.

A) Ninguna de ellas es invertible.

B) Todas son invertibles.

C) La matriz C es la única invertible.

D) Solo las matrices A y C son invertibles

Opción correcta: A)
Resolución: la matriz A no es invertible porque no es cuadrada. La matriz $B \in \mathbb{R}^{4x4}$ posee dos columnas iguales por lo que $\det(B) = 0$. Por último se puede verificar que $\det(C) = 0$. Por todo lo analizado afirmamos que ninguna de las matrices poseerá inversa. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá el sistema $\begin{cases} 2x + 2y - 2kz = 2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 5y + k^2 z = k^2 \end{cases}$ Elegí la única afirmación verdadera.

A) Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado .

B) Si $k = 1$ el sistema es compatible determinado.

C) Si $k = -1$ el sistema es incompatible.

D) Si $k = -2$ el sistema es incompatible.

Opción correcta: D)
Resolución: este problema se resuelve utilizando el método de triangulación de Gauss.

Se puede reescribir el sistema $\begin{cases} 2x + 2y - 2kz = 2 \\ y + (k+1)z = -1 \\ (k^2 + k - 2)z = k^2 - 1 \end{cases}$ para comprobar que con $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado, con $k = -2$ el sistema es incompatible, y con cualquier otro valor de $k \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado . Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 9.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que una base de la imagen es $\{(3, -1, 2), (1, 1, 5), (-5, 4, 3)\}$. Elegí la opción que representa una fórmula de T.

A) $T(x, y, z) = (3x - 5y + 2, x + 4y + 2z, 2x + 3y + 10z)$

B) $T(x, y, z) = (3x - y + 8z, -x + 4y + 2z, 2x + 3y + 10z)$

C) $T(x, y, z) = (3x - 5y + 2z, x - 4y - 2z, 2x - y + 4z)$

D) $T(x, y, z) = (3x - 5y + 2z, -x + 4y + 2z, 2x + 3y + 10z)$

Opción correcta: D)
Resolución: observamos que $T(x, y, z) = (3x - 5y + 2z, -x + 4y + 2z, 2x + 3y + 10z) = x(3, -1, 2) + y(-5, 4, 3) + z(2, 2, 10)$, como $(2, 2, 10) = 2(1, 1, 5)$ entonces T está generado por la base de la imagen. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A_T = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 0 & k & 2k \\ 1 & -2 & -k \end{pmatrix}$ la cual está asociada a una $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Indicá la opción que muestra todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple que $T(1;3;-1) = (-7, -3; 2k-2)$.

A) $k = 2$ B) $k = 3$ C) $k = -3$ D) $k = -2$

Opción correcta: C)
Resolución: realizando el producto $A_T = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 0 & k & 2k \\ 1 & -2 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 2k-2 \end{pmatrix}$ de la segunda componente tenemos que $k = -3$ y esto es consistente con la solución de $2k - 2 = k - 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

S es el conjunto solución de la ecuación $\frac{z^3+2}{i} = 25i$. Elegí la única afirmación verdadera.

A) El conjunto S tiene cuatro elementos.
B) Uno de los elementos de S es un complejo imaginario puro.
C) El conjunto S no contiene números reales.
D) La suma de todos los elementos de S es 0.

Opción correcta: D)
Resolución: si resolvés la ecuación $\frac{z^3+2}{i} = 25i$ vas a llegar a la ecuación equivalente $z^3 = -27$. Las soluciones de esta ecuación son: -3, $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$ y $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$. Si analizás cada una de las opciones ofrecidas, la única verdadera es que todos los elementos de S suman 0. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá los complejos $z_1 = -6 + 4i$ y $z_2 = 3 - 2i$.
Elegí la opción que muestra el módulo del complejo $\frac{(z_1)^3}{(z_2)^2}$.

A) $8\sqrt{13}$ B) 64 C) $\sqrt{104}$ D) 832

Opción correcta: A)
Resolución: para calcular el módulo del complejo pedido, primero podés resolver los siguientes cálculos: $(-6+4i)^3 = 72 + 368i$ y $(3-2i)^2 = 5 - 12i$. A continuación realizás el cociente $\frac{72+368i}{5-12i}$ y obtenés $-24 + 16i$. A este complejo le calculás el módulo y obtenés la respuesta pedida. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra el valor de $a \in \mathbb{R}$ de manera tal que $x = -4$ sea raíz múltiple del polinomio $P(x) = (2x^3 + 14x^2 + 16x - 6a)(2x - 6a)$.

A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) $\frac{16}{3}$ D) $-\frac{16}{3}$

Opción correcta: C)
Resolución: como $x = -4$ debe ser raíz P, entonces $P(-4) = 0$, planteando esto podemos deducir que existen dos valores de a posibles: $a = -\frac{4}{3}$ y $a = \frac{16}{3}$. Sin embargo, solo con el segundo de estos valores se cumple que -4 es raíz múltiple de P. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^4 - 27x^2 + 50$. Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única correcta.

A) Todas las raíces de P son racionales.

B) La suma de las raíces de P es igual a 0.

C) P no tiene raíces reales.

D) P solo tiene una raíz real.

Opción correcta: B)
Resolución: para el P dado, podemos usar el Teorema de Gauss y deducir que -5 y 5 son raíces de P, dividiendo ahora por $(x-5)$ y luego por $(x+5)$ obtenemos (x^2-2). Entonces, $P(x) = (x-5)(x+5)(x^2-2)$, cuyo último factor no tiene raíces racionales puesto que estas son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, dos raíces reales. Finalmente, la única opción correcta es la segunda, dado que si sumamos las cuatro raíces halladas nos da cero. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14