UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 12/06/2024 - Tema 3

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_3; x_1 + x_2 + 2x_3; 2x_1 + x_2 + x_3)$. Si C representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el valor que indica el volumen de $T(C)$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

Opción correcta: A)
Resolución: la matriz asociada a la transformación lineal es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es 0, por lo tanto el volumen de $T(C)$ es cero. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá el complejo z que satisface la ecuación: $\dfrac{z-3}{4} = 2\overline{z} + 2i$.
Elegí la única opción que muestra las partes real e imaginaria de z.

A) $Re(z) = -\frac{3}{7}$, $Im(z) = -\frac{8}{7}$
B) $Re(z) = \frac{8}{9}$, $Im(z) = -\frac{3}{7}$
C) $Re(z) = -\frac{8}{7}$, $Im(z) = -\frac{3}{7}$
D) $Re(z) = -\frac{3}{7}$, $Im(z) = \frac{8}{9}$

Opción correcta: D)
Resolución: si expresás $z = a + bi$ y $\overline{z} = a - bi$ y lo reemplazás en la ecuación dada, se obtiene la igualdad $-7a + 9bi = 3 + 8i$. De esta ecuación se pueden deducir los valores de $a = Re(z) = -\frac{3}{7}$ y $b = Im(z) = \frac{8}{9}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá los complejos $z_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ y $z_2 = 4e^{\frac{3\pi}{4}i}$.
Elegí la opción que muestra el argumento del complejo $z_1 \cdot z_2$.

A) $\dfrac{13\pi}{12}$ B) $\dfrac{12\pi}{13}$ C) $\dfrac{\pi}{4}$ D) $\dfrac{4\pi}{7}$

Opción correcta: A)
Resolución: el argumento del complejo z_1 puede calcularse como: $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} : \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. El argumento de z_2 es dato. Si se suman ambos argumentos, se obtiene el argumento del complejo $z_1 \cdot z_2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que cumple las siguientes condiciones: $P(-i) = 2$, P es divisible por $(x^2 + 6)$ y $-5i$ es una raíz simple de P. Indicá cuál de las opciones muestra el término independiente de P.

A) 150 B) $-30i$ C) $\frac{1}{60}$ D) $\frac{5}{2}$

Opción correcta: D)
Resolución: de los datos podemos deducir que $(x + 5i)$ divide a P puesto que $-5i$ es una de sus raíces; además, como todos los coeficientes deben ser reales, $(x - 5i)$ necesariamente también será uno de sus divisores. Sumado a que otro de los factores de P debe ser $(x^2 + 6)$, el polinomio de menor grado que cumple estas características es: $P(x) = a(x + 5i)(x - 5i)(x^2 + 6)$, con a su coeficiente principal. Notemos que el dato que nos falta usar, P(-i)=2, es útil para hallar a y de esta manera deducir que en realidad $P(x) = \frac{1}{60}(x + 5i)(x - 5i)(x^2 + 6)$. Desarrollando, se puede leer que el término independiente de P es $\frac{5}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Indicá cuál de las siguientes opciones muestra la factorización en $\mathbb{R}$ del polinomio $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 6x + 9) - 24x$.

  A) $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)(x - 3)^2$
  B) $x(x^2 + 5)(x - 3)^2$
  C) $(x - 5)(x - 1)(x^2 + 9)$
  D) $(x - 5)(x - 1)(x - 3i)(x + 3i)$

  Opción correcta: C)
  Resolución: lo primero que podemos hacer es desarrollar a P, nos queda $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 54x + 45$. Luego, mediante el Teorema de Gauss, podemos deducir que 1 y 5 son las únicas raíces racionales de P. Dividiendo a P por $(x - 1)$ y por $(x - 5)$ obtenemos $(x^2 + 9)$, lo que nos permite escribir: $P(x) = (x - 1)(x - 5)(x^2 + 9)$. Dado que el último factor no posee raíces reales, obtenemos la factorización pedida. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Dado el sistema lineal $S = \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ x - 3y - z = 2 \end{cases}$ al que se le agrega la ecuación $ay + bz = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Elegí la única afirmación verdadera.

  A) Si $a = 7$ y $b = 7$ el sistema S' obtenido es compatible determinado.
  B) Si $a = \frac{3}{2}$ y $b = -\frac{3}{2}$ el sistema S' obtenido es compatible indeterminado.
  C) Si $a = -12$ y $b = -12$ el sistema S' obtenido es incompatible.
  D) Si $a = -\frac{5}{4}$ y $b = \frac{5}{4}$ el sistema S' obtenido es incompatible.

  Opción correcta: C)
  Resolución: triangulando la matriz ampliada podemos llegar a la expresión $(-a+b)x_3 = a$; si $a = b$ pero distintos de 0 el sistema S' resulta incompatible, que es lo que se cumple en la respuestas A) y C), si a y b son opuestos como en el caso de las opciones B) y D) , el sistema S' resulta compatible determinado. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Considerá las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 5 & 6 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 15 & 18 & 3b \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
  Elegí la única afirmación verdadera.

  A) $\det(A) = 3 \cdot \det(B)$
  B) $\det(A) = -\frac{1}{9} \det(B)$
  C) $3^3 \cdot \det(A) + \det(B) = 0$
  D) $9 \cdot \det(A) - \det(B) = 0$

  Opción correcta: D)
  Resolución: las matrices A y B tienen dos filas iguales pero en distinta posición. Si en la matriz A realizamos $-3 \cdot F_1$, $3 \cdot F_3$, y cambiamos de posición F_2, obtenemos la matriz B. Aplicando propiedades de los determinantes de matrices llegamos a que $(-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot \det(A) = 9 \cdot \det(A) = \det(B)$. La única afirmación coherente con este resultado es que $9 \cdot \det(A) - \det(B) = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10 .

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

  Considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, 3x + 2y)$.
  Elegí la opción correcta.

  A) La matriz asociada a la transformación lineal T es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

  B) La base del espacio imagen de T es $\{(2, 3)(-1, 2)\}$

  C) $\text{Nu}(T) = \{(1, 2)\}$

  D) La matriz asociada a la transformación lineal T^{-1} es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

  Opción correcta: B)

  Resolución: si hallamos la matriz asociada a la transformación lineal T obtenemos $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ con lo cual descartamos la opción A), y como la inversa de esta matriz es $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ también descartamos el ítem D). Queremos encontrar una base para el espacio imagen de T. Para ello, primero calculamos la imagen de un conjunto de vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$:
  $T(1, 0) = (2(1) - 0, 3(1) + 2(0)) = (2, 3)$
  $T(0, 1) = (2(0) - 1, 3(0) + 2(1)) = (-1, 2)$
  Por lo tanto, la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ bajo T es $\{(2, 3), (-1, 2)\}$. Esta es una base del espacio imagen de T. Como esta tiene dos elementos podemos descartar la opción C). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.