**UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 12/06/2024 - Tema 2**

---

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Dado el sistema lineal $S = \begin{cases} -3x + 4y - 2z = -1 \\ 2x - 6y - 2z = 4 \end{cases}$ al que se le agrega la ecuación $ay + bz = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Elegí la única afirmación verdadera.

A) Si $a = -5$ y $b = -5$ el sistema $S'$ obtenido es compatible determinado.
B) Si $a = \frac{5}{2}$ y $b = -\frac{5}{2}$ el sistema $S'$ obtenido es compatible indeterminado.
C) Si $a = -11$ y $b = 11$ el sistema $S'$ obtenido es incompatible.
D) Si $a = -\frac{3}{2}$ y $b = -\frac{3}{2}$ el sistema $S'$ obtenido es incompatible.

Opción correcta: D)
Resolución: triangulando la matriz ampliada podemos llegar a la expresión $(-a+b)x_3 = a$; si $a = b$ pero distintos de 0 el sistema $S'$ resulta incompatible, que es lo que ocurre en las opciones A) y D), si $a$ y $b$ son opuestos como en el caso de las opciones B) y C) , el sistema $S'$ resulta compatible determinado. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

---

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & -21 & 3b \\ -6 & 3 & -9 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$. Elegí la única afirmación verdadera.

A) $\det(A) = -\frac{1}{9} \cdot \det(B)$
B) $\det(A) = 3 \cdot \det(B)$
C) $\det(B) - 9 \cdot \det(A) = 0$
D) $27 \cdot \det(A) - \det(B) = 0$

Opción correcta: C)
Resolución: las matrices A y B tienen dos filas iguales pero en distinta posición. Si en la matriz A realizamos $-3 \cdot F_2$, $3 \cdot F_3$ , y cambiamos de posición $F_1$, obtenemos la matriz B. Aplicando propiedades de los determinantes de matrices llegamos a que
$(-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot \det(A) = 9 \cdot \det(A) = \det(B)$. La única afirmación coherente con este resultado es $\det(B) - 9 \cdot \det(A) = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

---

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$T(x, y) = (3x - 2y, x - y)$. Elegí la opción correcta:

A) La matriz asociada a la transformación lineal $T^{-1}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
B) La base del espacio imagen de $T$ es $\{(2, -4); (-1, 2)\}$
C) $\text{Nu}(T) = \{(1, -\frac{3}{2})\}$
D) La matriz asociada a la transformación lineal $T$ es $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Opción correcta: A)
Resolución: si hallamos la matriz asociada a la transformación lineal $T$ obtenemos $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con lo cual descartamos la opción D), y como la inversa de esta matriz es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ tenemos que la respuesta correcta es la A). Para descartar las otras opciones podemos encontrar una base para el espacio imagen de $T$. Para ello, primero calculamos la imagen de un conjunto de vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$:
$T(1, 0) = (3(1) - 2(0), 1 - 0) = (3, 1)$
$T(0, 1) = (3(0) - 2(1), 0 - 1) = (-2, -1)$
Por lo tanto, la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ bajo $T$ es $\{(3, 1), (-2, -1)\}$. Esta es una base del espacio imagen de $T$. Como esta tiene dos elementos podemos descartar la opción C). Mientras que la opción B queda descartada pues es un conjunto L.D. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

---

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : T(x_1; x_2; x_3) = (x_1+x_2+x_3; x_1-x_2+2x_3; 2x_1-x_2+x_3)$. Si $C$ representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el valor que indica el volumen de $T(C)$.

A) 1 B) 4 C) 5 D) -4

Opción correcta: C)

Resolución: la matriz asociada a la transformación lineal es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es 5, por lo tanto el volumen de $T(C)$ es 5. Estos contenidos los podés encontrar en la sesiones 11 y 12.

---

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá el complejo $z$ que satisface la ecuación: $\dfrac{z-4}{3} = 5\overline{z} + 5i$.

Elegí la única opción que muestra las partes real e imaginaria de $z$.

A) $Re(z) = -\frac{2}{7}$, $Im(z) = \frac{15}{14}$

B) $Re(z) = -\frac{2}{7}$, $Im(z) = \frac{15}{16}$

C) $Re(z) = -\frac{8}{7}$, $Im(z) = -\frac{3}{7}$

D) $Re(z) = \frac{15}{14}$, $Im(z) = -\frac{2}{7}$

Opción correcta: B)

Resolución: si expresás $z = a + bi$ y $\overline{z} = a - bi$ y lo reemplazás en la ecuación dada, se obtiene la igualdad $-14a+16bi = 4+15i$. De esta ecuación se pueden deducir los valores de $a = Re(z) = -\frac{2}{7}$ y $b = Im(z) = \frac{15}{16}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá los complejos $w_1 = 3e^{\frac{5\pi}{4}i}$ y $w_2 = \dfrac{5}{7} + \dfrac{5\sqrt{3}}{7}i$.

Elegí la opción que muestra el argumento del complejo $w_1 \cdot w_2$.

A) $\frac{12\pi}{5}$ B) $\frac{12\pi}{19}$ C) $\frac{19\pi}{12}$ D) $\frac{5\pi}{12}$

Opción correcta: C)

Resolución: el argumento del complejo $w_2$ puede calcularse como: $\alpha_2 = \arctan\left(\frac{5\sqrt{3}}{7} : \frac{5}{7}\right) = \frac{\pi}{3}$. El argumento de $w_1$ es dato. Si se suman ambos argumentos, se obtiene el argumento del complejo $w_1 \cdot w_2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que cumple las siguientes condiciones: $P(-i) = 16$, $P$ es divisible por $(x^2+8)$ y $-5i$ es una raíz simple de $P$. Indicá cuál de las opciones muestra el término independiente de $P$.

A) $\frac{400}{21}$ B) 200 C) $-40i$ D) $\frac{2}{21}$

Opción correcta: A)

Resolución: de los datos podemos deducir que $(x+5i)$ divide a $P$ puesto que $-5i$ es una de sus raíces; además, como todos los coeficientes deben ser reales, $(x-5i)$ necesariamente también será uno de sus divisores. Sumado a que otro de los factores de $P$ debe ser $(x^2+8)$, el polinomio de menor grado que cumple estas características es: $P(x) = a(x+5i)(x-5i)(x^2+8)$ con $a$, su coeficiente principal. Notemos que el dato que nos falta usar, P(-i)=16, es útil para hallar $a$ y de esta manera deducir que en realidad $P(x) = \frac{2}{21}(x+5i)(x-5i)(x^2+8)$. Desarrollando, se puede leer que el término independiente de $P$ es $\frac{400}{21}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Indicá cuál de las siguientes opciones muestra la factorización en $\mathbb{R}$ del polinomio $P(x) = (x^2 - 6x + 5)(x^2 + 9) + 24x$.

  A) $(x^2 + 5)(x - 3)^2$

  B) $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)(x - 3)^2$

  C) $x(x^2 + 5)(x - 1)(x^2 + 9)$

  D) $(x - 5)(x - 1)(x - 3i)(x + 3i)$

  Opción correcta: A)
  Resolución: lo primero que podemos hacer es desarrollar a $P$, nos queda
  $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 30x + 45$.
  Luego, mediante el Teorema de Gauss, podremos obtener las posibles raíces racionales, de este análisis se deduce que 3 es la única raíz racional, y es doble. Dividiendo a $P$ por $(x - 3)$ dos veces obtenemos $(x^2 + 5)$, de donde se deduce que $P(x) = (x - 3)^2(x^2 + 5)$. Dado que el último factor no posee raíces reales, obtenemos la factorización pedida. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.