

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Dado el sistema lineal $S = \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ x - 3y - z = 2 \end{cases}$ al que se le agrega la ecuación $ay + bz = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Elegí la única afirmación verdadera.

- A) Si $a = 7$ y $b = 7$ el sistema S' obtenido es compatible determinado.
- B) Si $a = \frac{3}{2}$ y $b = -\frac{3}{2}$ el sistema S' obtenido es compatible indeterminado.
- C) Si $a = -12$ y $b = -12$ el sistema S' obtenido es incompatible.
- D) Si $a = -\frac{5}{4}$ y $b = \frac{5}{4}$ el sistema S' obtenido es incompatible.

Opción correcta: C)

Resolución: triangulando la matriz ampliada podemos llegar a la expresión $(-a+b)x_3 = a$; si $a = b$ pero distintos de 0 el sistema S' resulta incompatible, que es lo que se cumple en la respuestas A) y C), si a y b son opuestos como en el caso de las opciones B) y D) , el sistema S' resulta compatible determinado. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 5 & 6 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 15 & 18 & 3b \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Elegí la única afirmación verdadera.

- A) $\det(A) = 3 \cdot \det(B)$
- B) $\det(A) = -\frac{1}{9} \det(B)$
- C) $3^3 \cdot \det(A) + \det(B) = 0$
- D) $9 \cdot \det(A) - \det(B) = 0$

Opción correcta: D)

Resolución: las matrices A y B tienen dos filas iguales pero en distinta posición. Si en la matriz A realizamos $-3 \cdot F_1$, $3 \cdot F_3$, y cambiamos de posición F_2 , obtenemos la matriz B. Aplicando propiedades de los determinantes de matrices llegamos a que $(-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot \det(A) = 9 \cdot \det(A) = \det(B)$. La única afirmación coherente con este resultado es que $9 \cdot \det(A) - \det(B) = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10 .

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, 3x + 2y)$. Elegí la opción correcta.

- A) La matriz asociada a la transformación lineal T es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- B) La base del espacio imagen de T es $\{(2, 3), (-1, 2)\}$
- C) $\text{Nu}(T) = \{(1, 2)\}$
- D) La matriz asociada a la transformación lineal T^{-1} es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Opción correcta: B)

Resolución: si hallamos la matriz asociada a la transformación lineal T obtenemos $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ con lo cual descartamos la opción A), y como la inversa de esta matriz es $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ también descartamos el ítem D). Queremos encontrar una base para el espacio imagen de T . Para ello, primero calculamos la imagen de un conjunto de vectores de la base canónica de \mathbb{R}^2 :

$$T(1, 0) = (2(1) - 0, 3(1) + 2(0)) = (2, 3)$$

$$T(0, 1) = (2(0) - 1, 3(0) + 2(1)) = (-1, 2)$$

Por lo tanto, la imagen de la base canónica de \mathbb{R}^2 bajo T es $\{(2, 3), (-1, 2)\}$. Esta es una base del espacio imagen de T . Como esta tiene dos elementos podemos descartar la opción C). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_3; x_1 + x_2 + 2x_3; 2x_1 + x_2 + x_3)$. Si C representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el valor que indica el volumen de $T(C)$.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

Opción correcta: A) Resolución: la matriz asociada a la transformación lineal es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es 0, por lo tanto el volumen de $T(C)$ es cero. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá el complejo z que satisface la ecuación: $\frac{z-3}{4} = 2\bar{z} + 2i$.

Elegí la única opción que muestra las partes real e imaginaria de z .

- A) $Re(z) = -\frac{3}{7}, Im(z) = -\frac{8}{7}$ C) $Re(z) = -\frac{8}{7}, Im(z) = -\frac{3}{7}$
B) $Re(z) = \frac{8}{9}, Im(z) = -\frac{3}{7}$ D) $Re(z) = -\frac{3}{7}, Im(z) = \frac{8}{9}$

Opción correcta: D)

Resolución: si expresás $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$ y lo reemplazás en la ecuación dada, se obtiene la igualdad $-7a + 9bi = 3 + 8i$. De esta ecuación se pueden deducir los valores de $a = Re(z) = -\frac{3}{7}$ y $b = Im(z) = \frac{8}{9}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá los complejos $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ y $z_2 = 4e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

Elegí la opción que muestra el argumento del complejo $z_1 \cdot z_2$.

- A) $\frac{13\pi}{12}$ B) $\frac{12\pi}{13}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{4\pi}{7}$

Opción correcta: A)

Resolución: el argumento del complejo z_1 puede calcularse como: $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} : \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. El argumento de z_2 es dato. Si se suman ambos argumentos, se obtiene el argumento del complejo $z_1 \cdot z_2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que cumple las siguientes condiciones: $P(-i) = 2$, P es divisible por $(x^2 + 6)$ y $-5i$ es una raíz simple de P . Indicá cuál de las opciones muestra el término independiente de P .

- A) 150 B) $-30i$ C) $\frac{1}{60}$ D) $\frac{5}{2}$

Opción correcta: D)

Resolución: de los datos podemos deducir que $(x + 5i)$ divide a P puesto que $-5i$ es una de sus raíces; además, como todos los coeficientes deben ser reales, $(x - 5i)$ necesariamente también será uno de sus divisores. Sumado a que otro de los factores de P debe ser $(x^2 + 6)$, el polinomio de menor grado que cumple estas características es: $P(x) = a(x + 5i)(x - 5i)(x^2 + 6)$, con a su coeficiente principal. Notemos que el dato que nos falta usar, $P(-i)=2$, es útil para hallar a y de esta manera deducir que en realidad $P(x) = \frac{1}{60}(x + 5i)(x - 5i)(x^2 + 6)$. Desarrollando, se puede leer que el término independiente de P es $\frac{5}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Indicá cuál de las siguientes opciones muestra la factorización en \mathbb{R} del polinomio

$$P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 6x + 9) - 24x.$$

A) $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)(x - 3)^2$

B) $x(x^2 + 5)(x - 3)^2$

C) $(x - 5)(x - 1)(x^2 + 9)$

D) $(x - 5)(x - 1)(x - 3i)(x + 3i)$

Opción correcta: C)

Resolución: lo primero que podemos hacer es desarrollar a P , nos queda

$P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 54x + 45$. Luego, mediante el Teorema de Gauss, podemos deducir que 1 y 5 son las únicas raíces racionales de P . Dividiendo a P por $(x - 1)$ y por $(x - 5)$ obtenemos $(x^2 + 9)$, lo que nos permite escribir: $P(x) = (x - 1)(x - 5)(x^2 + 9)$. Dado que el último factor no posee raíces reales, obtenemos la factorización pedida. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
