UBAXXI - Álgebra A - Resolución Recuperatorio 2do. parcial - 19/06/25 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Considerá la ecuación $\frac{z+1}{z-3} = 2iz$ y elegí la opción que contiene la suma de las soluciones de la ecuación.

  A) $2 + \frac{1}{2}i$
  B) $1 - i$
  C) $3 - \frac{1}{2}i$
  D) $-1 - i$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  A partir de $\frac{z+1}{z-3} = 2iz$ tenemos la ecuación $2iz^2 - (1+6i)z - 1 = 0$, usando la resolvente tenemos que las soluciones son $\frac{(1+6i)+\sqrt{(1+6i)^2+8i}}{4i}$ y $\frac{(1+6i)-\sqrt{(1+6i)^2+8i}}{4i}$, si los sumamos obtenemos $\frac{2(1+6i)}{4i} = \frac{1+6i}{2i} = 3 - \frac{1}{2}i$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  θ_0 es el argumento de $2-i$ y $z = (2-i)^6$. Elegí la opción que muestra el valor de k tal que $\overline{z} = w$ y $w = 3 + ki$.

  A) $k = \mathrm{sen}(6\theta_0)$
  B) $k = -5\mathrm{sen}(6\theta_0)$
  C) $k = 25\mathrm{sen}(6\theta_0)$
  D) $k = -125\mathrm{sen}(6\theta_0)$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Como θ_0 es el argumento de $2-i$ entonces $z = 5^3(\cos(6\theta_0) + i\mathrm{sen}(6\theta_0))$, con lo cual $k = -125\mathrm{sen}(6\theta_0)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 16$. Indicá la única opción que muestra la factorización de P en $\mathbb{C}[x]$.

  A) $(x-2)(x^2+2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$
  B) $(x-2)(x-2)(x+2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$
  C) $(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$
  D) $(x-2)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2x+4)$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  $P(X)$ puede ser factorizado por grupos: $x^5-2x^3-8x^2+16 = x^3(x^2-2)-8(x^2-2) = (x^3-8)(x^2-2)$. Luego, se factoriza cada uno de los polinomios $(x^3-8) = (x-2)(x^2+2x+4)$ y $x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. Solo resta encontrar las raíces complejas de x^2+2x+4 para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^4 - 16x^2 + 63$. Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única correcta.

A) P solo tiene dos raíces no racionales.

B) P no tiene raíces reales.

C) Todas las raíces de P son racionales.

D) La suma de las raíces de P es igual a 4.

Opción correcta: A)
Resolución
Para el P dado, podemos usar el Teorema de Gauss y deducir que -3 y 3 son raíces de P, dividiendo ahora por $(x-3)$ y luego por $(x+3)$ obtenemos (x^2-7). Entonces, $P(x) = (x-3)(x+3)(x^2-7)$, cuyo último factor no tiene raíces racionales puesto que estas son $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$. Obtuvimos entonces las cuatro raíces de P, vemos que su suma es cero, y solo dos de ellas son números no racionales. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

M, P, Q son matrices de 3×3 tales que: $\det(P) = 7$, $M = P \cdot Q - 2 \cdot P$ y $Q = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz M.

A) 280 B) -224 C) 32 D) 224

Opción correcta: D)
Resolución
Como la matriz P es un factor común en la igualdad $M = P \cdot Q - 2 \cdot P$, podés expresar dicha matriz como $M = P \cdot (Q - 2 \cdot I)$. Y, luego, aplicando las propiedades de los determinantes, calcular $\det(M) = \det(P) \cdot \det(Q - 2 \cdot I)$ para encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ -4x_1 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

Elegí la única opción que muestra su conjunto solución.

A) $\{\alpha(-4; -9; 15; 1) + (-1; 3; 0; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

B) $\{(-1; 3; 0; 0)\}$

C) $\{(-4; -9; 15; 1) + \alpha(-1; 3; 0; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

D) $\{(-4; -9; 15; 1)\}$

Opción correcta: A)
Resolución
Si se escribe el sistema en forma matricial y se lo triangula, una posible forma de escribir el conjunto solución es $(-1 - 4x_4; 3 - 9x_4; 15x_4; x_4)$. De esta expresión se puede encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de ecuación $T(x_1; x_2; x_3) = (-x_3; x_1 + x_3)$y los subespacios $S_1 = \{(x_1; x_2; x_3) : x_1 - 2x_3 = 0\}$ y $S_2 = \langle(-1; 1)\rangle$, elegí la opción que muestra una afirmación verdadera.

A) $T(S_1)$ tiene dimensión 2.

B) $T^{-1}(S_2)$ tiene dimensión 1.

C) $T(S_1)$ tiene dimensión 1.

D) $T^{-1}(S_2)$ tiene dimensión 0.

Opción correcta: C)

Resolución

El subespacio S_1 está generado por $\langle(2; 0; 1); (0; 1; 0)\rangle$, luego, al aplicarle T a este nos queda $T(S_1) = \langle(-1; 3)\rangle$ por lo que la dimensión de $T(S_1)$ es 1. Observar que, si analizamos la preimagen de S_2, al plantear $T(x_1; x_2; x_3) = (-\beta; \beta)$ de estas ecuaciones se deduce que $T^{-1}(S_2)$ es un subespacio de dimensión 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá al vector $\vec{v} = (1; 2; -1)$ y a las transformaciones lineales T y R. La matriz asociada a T es: $M_T \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Además, R resulta una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj del eje z, con ángulo $\frac{\pi}{2}$. Sabiendo que se cumple que $T \circ R(\vec{v}) = (5; 0; b)$, indicá la opción que muestra los valores de a y b.

A) $a = 7$ y $b = 4$

B) $a = 1$ y $b = 3$

C) $a = 3$ y $b = -4$

D) $a = -2$ y $b = 6$

Opción correcta: C)

Resolución

Al aplicar la rotación R al vector $(1; 2; -1)$ obtenemos el vector $(-2; 1; -1)$. Siguiendo, planteamos $M_T \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$. De esta última ecuación podemos despejar a y b. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.
