- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

M, P, Q son matrices de 3×3 tales que: $\det(P) = 6$, $M = 3 \cdot P + P \cdot Q$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz M .

- A) -12 B) 72 C) -72 D) 6

Opción correcta: C)

Resolución

Como la matriz P es un factor común en la igualdad $M = 3 \cdot P + P \cdot Q$, podés expresar dicha matriz como $M = P \cdot (2 \cdot I + Q)$. Y, luego, aplicando las propiedades de los determinantes, calcular $\det(M) = \det(P) \cdot \det(3 \cdot I + Q)$ para encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = -2 \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

Elegí la única opción que muestra su conjunto solución.

- A) $\{(0; 3; 1; 0)\}$ C) $\{(15; -9; 4; 1)\}$
 B) $\{\alpha(15; -9; 4; 1) + (0; 3; 1; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$ D) $\{(15; -9; 4; 1) + \alpha(0; 3; 1; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

Opción correcta: B)

Resolución

Si se escribe el sistema en forma matricial y se lo triangula, una posible forma de escribir el conjunto solución es $(15x_4; 3 - 9x_4; 1 + 4x_4; x_4)$. De esta expresión se puede encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de ecuación $T(x_1; x_2; x_3) = (-x_2; x_2 + x_3)$ y los subespacios $S_1 = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 - 2x_3 = 0\}$ y $S_2 = \langle (-2; 3) \rangle$, elegí la opción que muestra una afirmación verdadera.

- A) $T(S_1)$ tiene dimensión 2. C) $T^{-1}(S_2)$ tiene dimensión 1.
 B) $T(S_1)$ tiene dimensión 3. D) $T^{-1}(S_2)$ tiene dimensión 2.

Opción correcta: D)

Resolución

El subespacio S_1 está generado por $\langle (1; 0; 0); (0; 2; 1) \rangle$, luego, al aplicarle T a este nos queda $T(S_1) = \langle (-2; 3) \rangle$ por lo que la dimensión de $T(S_1)$ es 1. Siguiendo, analizamos la preimagen de S_2 , al plantear $T(x_1; x_2; x_3) = (-2\beta; 3\beta)$ de estas ecuaciones se deduce que $T^{-1}(S_2)$ es un subespacio de dimensión 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá al vector $\vec{v} = (1; 3; -1)$ y a las transformaciones lineales T y R . La matriz asociada a T es: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & b \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. R resulta una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje z . Sabiendo que se cumple que $T \circ R(\vec{v}) = (a; -8; -6)$; indicá la opción que muestra los valores de a y b .

A) $a = -2$ y $b = 6$

C) $a = b$

B) $a = -2$ y $b = 10$

D) $a = 0$ y $b = 8$

Opción correcta: A)

Resolución

Al aplicar la rotación R al vector $(1; 3; -1)$ obtenemos el vector $(-3; 1; -1)$. Siguiendo, planteamos

$M_T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$. De esta última ecuación podemos despejar a y b . Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá la ecuación $\frac{z-2}{z+1} = iz$ y elegí la opción que contiene la suma de las soluciones de la ecuación.

A) $1 + i$

C) $-1 + i$

B) $1 - i$

D) $-1 - i$

Opción correcta: D)

Resolución

A partir de $\frac{z-2}{z+1} = iz$ tenemos la ecuación $iz^2 + (-1+i)z + 2 = 0$, usando la resolvente tenemos que las soluciones son $\frac{-(-1+i) + \sqrt{(-1+i)^2 - 8i}}{2i}$ y $\frac{-(-1+i) - \sqrt{(-1+i)^2 - 8i}}{2i}$, si los sumamos obtenemos $\frac{-2(-1+i)}{2i} = \frac{1-i}{i} = -1 - i$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

θ_0 es el argumento de $2 + 3i$ y $z = (2 + 3i)^4$. Elegí la opción que muestra el valor de k tal que $\bar{z} = w$ con $w = 2 + ki$.

A) $k = 169 \cdot \text{sen}(4\theta_0)$

B) $k = -13 \cdot \text{sen}(4\theta_0)$

C) $k = -169 \cdot \text{sen}(4\theta_0)$

D) $k = 13 \cdot \text{sen}(4\theta_0)$

Opción correcta: C)

Resolución

Como θ_0 es el argumento de $2 + 3i$ entonces $z = 13^2(\cos(4\theta_0) + i\text{sen}(4\theta_0))$, con lo cual $k = -169\text{sen}(4\theta_0)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 7x^3 - x^2 + 7$. Indicá la única opción que muestra la factorización de P en $\mathbb{C}[x]$.

- A) $(x - 1)(x^2 + 7) \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- B) $(x - 1)(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- C) $(x - 1)(x - 7)(x + 7) \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- D) $(x - 1)(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})(x^2 + x + 1)$

Opción correcta: B)

Resolución

$P(X)$ puede ser factorizado por grupos: $x^5 - 7x^3 - x^2 + 7 = x^3(x^2 - 7) - 1(x^2 - 7) = (x^3 - 1)(x^2 - 7)$. Luego, se factoriza cada uno de los polinomios $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ y $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$. Solo resta encontrar las raíces complejas de $x^2 + x + 1$ para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^4 - 27x^2 + 50$. Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única correcta.

- A) P no tiene raíces reales.
- B) La suma de las raíces de P es igual a 8.
- C) Todas las raíces de P son racionales.
- D) P solo tiene dos raíces no racionales.

Opción correcta: D)

Resolución

Para el P dado, podemos usar el Teorema de Gauss y deducir que -5 y 5 son raíces de P , dividiendo ahora por $(x - 5)$ y luego por $(x + 5)$ obtenemos $(x^2 - 2)$. Entonces, $P(x) = (x - 5)(x + 5)(x^2 - 2)$, cuyo último factor no tiene raíces racionales puesto que estas son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Obtuvimos entonces las cuatro raíces de P , vemos que su suma es cero, y solo dos de ellas son números no racionales. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.