UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Rec. 1er. parcial - 19/06/25 - Tema 2

- Ejercicio 1 (1.25 ptos.)
  Considerá los vectores $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ y $\vec{w} = (3a; a^2; -1)$ Indicá la única opción que muestra todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que hacen que se cumpla simultáneamente que: los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ y que la norma del vector $\vec{w}$ es igual a $\sqrt{401}$.

  A) 2
  B) -1
  C) 4
  D) $\sqrt{2}$

  Opción correcta: C)

  Resolución
  Para resolver este problema planteamos las dos condiciones. De la primera podemos deducir que los vectores son ortogonales por lo que el producto escalar nos dará cero.
  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right) \cdot (3a; a^2; -1) = 0$
  $-\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a^2 - 2 = 0$. De donde se deduce que $a = -1$ ó $a = 4$
  Teniendo ahora en cuenta que la norma de $\vec{w}$ debe ser $\sqrt{401}$, esto solo se verifica para $a = 4$.

- Ejercicio 2 (1.25 ptos.)
  Considerá las operaciones de dilatación de escalar $\lambda = 4$ y traslación con dirección $\vec{u} = (-1; 1; 16)$. Si se le aplican estas operaciones, primero la dilatación y seguido la traslación, al vector $\vec{w} = (-2a; 0; -3 + a)$, donde $a \in \mathbb{R}$, se obtiene el vector $\vec{v}$. Indicá la única opción que muestra las coordenadas de $\vec{v}$.

  A) $(-9a; 1; 0)$
  B) $(-8a - 1; 1; 4a + 4)$
  C) $(-8a - 1; 3; 28 - 4a)$
  D) $(-8a; 3; 4 + 4a)$

  Opción correcta: B)

  Resolución
  Planteando las operaciones que nos indica el enunciado, podemos escribir:
  $\lambda \cdot (-2a; 0; -3 + a) + \vec{u}$
  Al realizar las operaciones indicadas nos queda:
  $4 \cdot (-2a; 0; -3 + a) + (-1; 1; 16) = (-8a - 1; 1; 4a + 4)$.

- Ejercicio 3 (1.25 ptos.)
  Considerá el plano de ecuación $x - y + z = 3$ y la recta de ecuación $(x; y; z) = \alpha \cdot (1; 2; 3) + (1; -4; -8)$ y elegí la opción que muestra una afirmación verdadera.

  A) La recta y el plano son paralelos.
  B) La recta y el plano son ortogonales.
  C) La recta está contenida en el plano.
  D) La recta y el plano se cortan en un único punto.

  Opción correcta: D)

  Resolución
  Todo punto de la recta es de la forma de $(\alpha + 1; 2\alpha - 4; 3\alpha - 8)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si reemplazamos en la ecuación del plano nos queda $\alpha = 3$. Es decir, la recta y el plano se cortan en un único punto: el punto $(4; 2; 1)$.

- Ejercicio 4 (1.25 ptos.)
Considerá los planos $\pi_1 : x + z = 3$; $\pi_2 : 2x + y + z = -1$.
Elegí la opción que muestra el ángulo entre π_1 y π_2.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{2}$

Opción correcta: B)

Resolución
Para hallar el ángulo entre los planos debemos calcular el ángulo entre las normales. Dicho ángulo lo calculamos usando la definición de producto escalar. Obtenemos entonces que el coseno del ángulo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Luego el ángulo es $\frac{\pi}{6}$.

- Ejercicio 5 (1.25 ptos.)
Considerá los subespacios $S = \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 0\}$ y
$T = \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_2 = 0, x_2 = 0\}$. Indicá la opción que muestra $S \cap T$.

A) $S \cap T = \langle (0; 0; 0; 1; 1), (0; 1; 1; 1; 0), (0; 0; 1; 1; 1) \rangle$
B) $S \cap T = \langle (1; 0; 0; 0; 0), (0; 0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 0; 1) \rangle$
C) $S \cap T = \langle (0; 0; 1; 0; 0), (0; 0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 0; 1) \rangle$
D) $S \cap T = \langle (0; 0; 1; 0; 0), (0; 1; 0; 0; 0), (0; 0; 0; 0; 1) \rangle$

Opción correcta: C)

Resolución
Como $T \subset S$ entonces $S \cap T = T = \langle (0; 0; 1; 0; 0), (0; 0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 0; 1) \rangle$

- Ejercicio 6 (1.25 ptos.)
Elegí la opción que muestra el valor de t para el cual el vector $(-3; 2; t)$ es combinación lineal de $(1; -1; 1)$ y $(2; -1; -1)$.

A) $t = 1$ C) $t = 0$
B) $t = -1$ D) $t = -2$

Opción correcta: C)

Resolución
A partir de la ecuación $(-3; 2; t) = \alpha(1; -1; 1) + \beta(2; -1; -1)$ tenemos que las dos primeras componentes nos devuelven el sistema:

$$\begin{cases} -3 = \alpha + 2\beta \\ 2 = -\alpha - \beta \end{cases}$$

A partir de este sistema obtenemos $\alpha = -1$ y $\beta = -1$. En la tercera componente tenemos $t = \alpha - \beta$, reemplazando en esta los valores obtenidos tenemos: $t = (-1) - (-1) = 0$.

- Ejercicio 7 (1.25 ptos.)
  Elegí la opción que muestra las coordenadas de los vértices de la elipse de ecuación $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$.

  A) $(-1;-1), (-5;-1), (-3;2), (-3;-4)$
  B) $(1;-1), (5;-1), (3;2), (3;-4)$
  C) $(-1;1), (-5;1), (3;2), (3;4)$
  D) $(-1;1), (-5;1), (-3;-2), (-3;4)$

  Opción correcta: B)

  Resolución
  La elipse $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ tiene como centro al punto $(3,-1)$. Como $a = 2$, desplazándote 2 unidades a izquierda y derecha del centro se obtienen los vértices $(1,-1)$ y $(5,-1)$. Como $b = 3$, desplazándote 3 unidades hacia arriba y hacia abajo del centro se obtienen los vértices $(3,2)$ y $(3,-4)$.

- Ejercicio 8 (1.25 ptos.)
  Elegí la única opción que indica los valores de p y q para que la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + px + qy = -15$ tenga radio $\sqrt{5}$ y centro en el punto de coordenadas $(-4;2)$.

  A) $p = 8$, $q = 4$.
  B) $p = 8$, $q = -4$.
  C) $p = -8$, $q = -4$.
  D) $p = -8$, $q = 4$.

  Opción correcta: B)

  Resolución
  La ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{5}$ y centro $(-4,2)$ puede ser escrita como $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 5$. Resolviendo las potencias cuadradas e igualando con la ecuación de la circunferencia dada en el enunciado del problema, podrán determinarse los valores de $p = 8$ y $q = -4$.
