UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 11/06/25 - Tema 9

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & k & 0 \\ 0 & 2 & k^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y elegí la única opción que indica el/los valores de k para el/los cual/es la matriz admite inversa.

A) Para ningún valor del número real k.

B) $k \in \mathbb{R}$

C) $k \neq -\sqrt{2}, k \neq \sqrt{2}$,

D) $k = -\sqrt{2}, k = \sqrt{2}$,

Opción correcta: C)
Resolución
Si calculás el determinante de la matriz A, obtenés la expresión $2k^2 - 4$. Ésta debe ser distinta de cero para que la matriz admita inversa y eso se verifica para los valores de k distintos a $-\sqrt{2}$ y a $\sqrt{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -5x_1 - 3x_2 - 7x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

Elegí la opción que muestra la clasificación para este sistema en función de su solución.

A) Sistema no homogéneo y compatible indeterminado.

B) Sistema incompatible.

C) Sistema no homogéneo y compatible determinado.

D) Sistema homogéneo y compatible determinado.

Opción correcta: A)
Resolución
El sistema que se ofrece no es homogéneo por lo que podés descartar una opción. Si lo resolvés, vas a poder expresar su conjunto solución como $(3 - x_4; 1 - x_4; -2 + x_4; x_4), x_4 \in \mathbb{R}$. Luego el sistema no es homogéneo y tiene infinitas soluciones. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de la cual se conoce que $T(0; 1; 0) = (1; -1; 5; 0)$, $T(1; 0; 0) = (0; 0; 3; 0)$ y $T(0; 0; 1) = (0; 0; 0; 3)$. Indicá cuál de las siguientes afirmaciones, acerca de T, es la única correcta.

A) $dim(Nu(T)) = 1$

B) T es epimorfismo

C) T es monomorfismo

D) $dim(Imagen(T)) = 2$

Opción correcta: C)
Resolución
Con los datos ofrecidos, es posible dar con el conjunto imagen de $T : \langle(1; -1; 5; 0); (0; 0; 3; 0); (0; 0; 0; 3)\rangle$. Al analizar este subespacio, se llega a que tiene dimensión 3, puesto que se trata de un conjunto linealmente independiente, entonces D) es falsa y también B) porque el conjunto de llegada de T es $\mathbb{R}^4$. Por el teorema de la dimensión arribamos a que $dim(\mathbb{R}^3) = dim(Nu(T)) + dim(ImagenT)$, de donde deducimos que $dim(NuT) = 0$ y en consecuencia, A) es falsa y C) es la única afirmación verdadera. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Considerá la transformación lineal de expresión $T(x_1; x_2; x_3) = (x_2; x_2 + x_1; x_1 - x_3)$ y el subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0; x_3 - x_2 = 0\}$. Indicá la opción muestra el subespacio H tal que $T(H) = S$.

  A) $\{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_2\}$
  B) $\{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0; x_3 + x_2 = 0\}$
  C) $\langle(1; 1; 1); (-1; 0; 1)\rangle$
  D) $\langle(1; 2; 0)\rangle$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Lo primero que podemos hallar son los generadores de S a partir de las ecuaciones que lo definen, nos que queda $S = \langle(1; 1; 1)\rangle$. El subespacio de la primera de las opciones, al aplicarle T nos devuelve un subespacio de dimensión 2 por lo que podemos desestimarla. La segunda opción es la correcta, dado que indica el subespacio $\langle(0; 1; -1)\rangle$ y al aplicarle T obtenemos el subespacio S. Se puede comprobar que al aplicar T a los subespacios de las últimas opciones, en ninguno de los casos llegamos a S. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Considerá $z \in \mathbb{C}$. Indicá la única opción que contiene una de las soluciones de la ecuación $2z - i = -z^{-1}$.

  A) 0
  B) i
  C) $-i$
  D) $3i$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  A la ecuación $2z - i = -z^{-1}$ la podemos reescribir como $2z^2 - iz + 1 = 0$. Usando ahora la fórmula resolvente queda que: $-\frac{i}{2}$ y i. Luego, buscando entre las opciones, la única correcta es la B). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Considerá $z = i^6(1 + i)^2 \cdot \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.
  Indicá la única opción que muestra la forma binomial de z.

  A) 2
  B) -2
  C) $2 + 2i$
  D) $2 - 2i$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Resolviendo las operaciones indicadas y recordando que $i^2 = -1$ nos queda:
  $z = i^6(1 + i)^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$
  $= 2(\cos(2\pi) + i\text{sen}(2\pi))$
  $= 2$
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

 Considerá los polinomios $f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 2x + b$ y $g(x) = x^2 - 3x - 7$, donde $b \in \mathbb{R}$. Si se sabe que $f(x)$ es divisible por $(x + 3)$, elegí la única opción que muestra el polinomio resto de la división entre $f(x)$ por $g(x)$.

A) 0

B) 257

C) $x^2 + 8x + 35$

D) $159x + 257$

Opción correcta: D)
Resolución
Como $x + 3$ divide a f luego $f(-3) = 0$. Esta ecuación permite hallar $b = 12$. Con este dato, solo resta hacer el cociente entre f y g para encontrar el polinomio resto de esa división. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

 Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 7x^4 - 4x^3 + 28x^2 - 5x + 35$. Si i es raiz de P, elegí la opción que muestra su factorización en $\mathbb{C}$.

A) $(x - 7)(x^2 + 5)(x^2 + 1)$

B) $(x - 7)(x^2 - 5)(x - i)(x + i)$

C) $(x - 7)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - i)(x + i)$

D) $(x - 7)(x - \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x^2 + 1)$

Opción correcta: C)
Resolución
Como i es raiz de P también es raiz $-i$. Luego $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ divide a P. Entonces $P(x) = x^5 - 7x^4 - 4x^3 + 28x^2 - 5x + 35 = (x^3 - 7x^2 - 5x + 35)(x - i)(x + i)$. Por el lema de Gauss se obtiene que $x = 7$ es raiz de P. Luego: $P(x) = (x^2 - 5)(x - 7)(x - i)(x + i)$. De esta última expresión se obtiene la factorización buscada sabiendo que $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$ también son raíces de P. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
