UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 11/06/25 - Tema 8

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

  Considerá z un número complejo que satisface la ecuación: $\dfrac{z}{3} = 5\overline{z} - 5i$ Indicá la única opción que muestra la parte real de z.

  A) $-\dfrac{3}{14}$ B) 0 C) $\dfrac{1}{7}$ D) $-\dfrac{15}{16}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  En este problema, una estrategia que resulta útil es escribir $z = a+bi$ en la ecuación del enunciado. En este caso, nos quedaría $\frac{a+bi}{3} = 5\overline{a+bi} - 5i$ y, de aquí, desarrollando podemos hacer visible la igualdad entre dos números complejos escritos en su forma binómica:
  $a + bi = 15a + (-15b - 15)i$. Usando ahora que "dos números complejos son iguales si coinciden en sus partes reales e imaginarias", podemos plantear que $a = 15a$ y de allí despejar a, la parte real del complejo z. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

  Considerá $z = (1 + 3i)^2 \cdot 2i^3$. Indicá la única opción que muestra el módulo de z.

  A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{20}$ C) 20 D) 10

  Opción correcta: C)
  Resolución
  Para hallar el módulo de z resultará conveniente tener disponibles sus propiedades, con ellas es posible plantear lo siguiente: $|z| = (|1 + 3i|)^2 \cdot |2i^3| = (\sqrt{10})^2 \cdot 2 = 20$.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

  Elegí la opción que muestra el conjunto solución en $\mathbb{C}$ de la ecuación: $x^2(x^2 - 7) = -x^3 + 9(x + 2)$.

  A) $S = \left\{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{7}}{2}; -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{7}}{2}\right\}$

  B) $S = \left\{-3; 3; -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{7}}{2}; -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{7}}{2}\right\}$

  C) $S = \{0; -1; -2\}$

  D) $S = \{-3; 3\}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Si se aplica la propiedad distributiva y se iguala a cero la expresión $x^2(x^2 - 7) = -x^3 + 9(x + 2)$ se obtiene la ecuación polinómica $x^4 + x^3 - 7x^2 - 9x - 18 = 0$. Por el lema de Gauss se pueden obtener las raíces $x = -3$ y $x = 3$. Si se factoriza el polinomio obtenido a partir de estas raíces, se lo puede reescribir como $(x + 3)(x - 3)(x^2 + x + 2)$. Solo resta buscar las raíces del polinomio cuadrático para encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá $C(x)$ el polinomio cociente de la división entre $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5$ y $Q(x) = x^2 + 1$. Elegí la única opción que muestra el polinomio $-3 \cdot [C(x)]^2$.

A) $-3x^4 + 18x^3 - 57x^2 + 90x - 75$

B) $-3x^4 - 57x^2 - 75$

C) $x^4 + 9x^2 + 25$

D) $x^2 - 3x + 5$

Opción correcta: A)
Resolución
El polinomio cociente de la división entre P y Q es $x^2 - 3x + 5$. Para obtener la respuesta hay que elevar ese polinomio al cuadrado y, luego, multiplicarlo por -3. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

$(a; b; b-1; 4a)$ es la solución del sistema lineal $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -5 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = -22 \end{cases}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Elegí la única opción que muestra los valores de a y de b.

A) $a = -1$ y $b = -3$

B) $a = -1$ y $b = 3$

C) $a = 3$ y $b = -1$

D) $a = 1$ y $b = -3$

Opción correcta: B)
Resolución
Si resolvés el sistema, vas a encontrar que es compatible determinado. Al igualar coordenada a coordenada la solución $(-1; 3; 2; 4)$ obtenida con $(a; b; b-1; 4a)$ podés determinar los valores de a y de b. Otro recorrido posible es que como sabemos que $(a; b; b-1; 4a)$ es la solución del sistema, alcanza con reemplazar estas coordenadas en cada ecuación para obtener los valores de a y b. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá las matrices: $A = \begin{pmatrix} k & 1 & m \\ k & -1 & 2 \\ 2 & m & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Elegí la opción que contiene los valores que k y m que satisfacen la ecuación $A \cdot B = C$.

A) $k = -4$, $m = -3$

B) $k = 3$, $m = 4$

C) $k = -3$, $m = -4$

D) $k = 4$, $m = 3$

Opción correcta: A)
Resolución
Si realizás el producto $A \cdot B$ se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} -k + m - 2 \\ -k + 4 \\ -2m - 5 \end{pmatrix}$. Si se iguala esa matriz a C se obtienen los valores de k y de m. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuyas expresiones funcionales son, respectivamente: $H(x_1; x_2; x_3) = (-x_3; x_1 + x_2)$ y $T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_3; -x_2; x_3)$. Indicá la única opción que muestra el vector que surge de realizar $H \circ T^{-1}(2; 0; -1)$.

A) $(1; 0; -3)$

B) $(1; 3)$

C) $(0; 0)$

D) $(1; 1)$

Opción correcta: D)

Resolución

Para resolver este ejercicio, usamos que $H \circ T^{-1}(2; 0; -1) = H(T^{-1}(2; 0; -1))$ y entonces, primero debemos hallar la preimagen por T del vector $(2; 0; -1)$ para luego, a ese vector resultado, aplicarle la transformación lineal H. Al resolver la ecuación $T(x_1; x_2; x_3) = (2; 0; -1)$, obtendremos que $T^{-1}(2; 0; -1) = (1; 0; -1)$ y luego, $H(1; 0; -1) = (1; 1)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

La matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5m \\ 0 & m & -5 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$ tal que se cumple que T es monomorfismo. Indicá la opción que muestra todos los valores de m posibles.

A) $\{5\}$

B) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

C) $\{-1; 1\}$

D) $\mathbb{R} \setminus \{25\}$

Opción correcta: B)

Resolución

Podemos decir que el hecho de que T tenga el mismo conjunto de llegada que de partida implica que: si T es monomorfismo también será epimorfismo y por lo tanto T inversible. Pensar que la matriz de T es inversible es equivalente a decir que su determinante es distinto de 0. Al plantear el determinante de la matriz de T observamos que nos da: $-25m^2 + 25$, con lo cual este se anula solo para $m \pm 1$, para los demás valores el determinante es distinto de cero y la matriz inversible, por lo tanto será monomorfismo. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.
