UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 11/06/25 - Tema 7

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
 Considerá z un número complejo que satisface la ecuación: $\dfrac{z}{5} = 3\overline{z} - 3i$ Indicá la única opción que muestra la parte imaginaria de z.

 A) $-\dfrac{3}{14}$ B) 0 C) $\dfrac{1}{7}$ D) $-\dfrac{15}{16}$

 Opción correcta: D)
 Resolución
 En este problema, una estrategia que resulta útil es escribir $z = a+bi$ en la ecuación del enunciado. En este caso, nos quedaría $\frac{a+bi}{5} = 3\overline{a+bi} - 3i$ y, de aquí, desarrollando podemos hacer visible la igualdad entre dos números complejos escritos en su forma binómica:
 $\frac{a}{5} + \frac{b}{5}i = 3a + (-3b-3)i$. Usando ahora que "dos números complejos son iguales si coinciden en sus partes reales e imaginarias", podemos plantear que $\frac{b}{5} = -3b - 3$ y de allí despejar b, la parte imaginaria del complejo z. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
 Considerá $z = (1-3i)^2 \cdot i^3$. Indicá la única opción que muestra el módulo de z.

 A) $\sqrt{10}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ C) 10 D) 9

 Opción correcta: C)
 Resolución
 Para hallar el módulo de z resultará conveniente tener disponibles sus propiedades, con ellas es posible plantear lo siguiente:
 $|z| = (|1-3i|)^2 \cdot |i^3| = (\sqrt{10})^2 \cdot 1 = 10$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
 Elegí la opción que muestra el conjunto solución en $\mathbb{C}$ de la ecuación: $x^2(x^2-3) = -x^3 + 4(x+1)$.

 A) $S = \left\{ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$
 B) $S = \{-2; 2\}$
 C) $S = \{0; -1\}$
 D) $S = \left\{ -2; 2; -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$

 Opción correcta: D)
 Resolución
 Si se aplica la propiedad distributiva y se iguala a cero la expresión $x^2(x^2-3) = -x^3 + 4(x+1)$ se obtiene la ecuación polinómica $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$. Por el lema de Gauss se pueden obtener las raíces $x = -2$ y $x = 2$. Si se factoriza el polinomio obtenido a partir de estas raíces, se lo puede reescribir como $(x+2)(x-2)(x^2+x+1)$. Solo resta buscar las raíces del polinomio cuadrático para encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá $C(x)$ el polinomio cociente de la división entre $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ y $Q(x) = x^2 + 1$. Elegí la única opción que muestra el polinomio $-3 \cdot [C(x)]^2$.

A) $-3x^4 - 78x^2 - 75$

B) $x^4 + 16x + 25$

C) $-3x^4 + 24x^3 - 78x^2 + 120x - 75$

D) $x^2 - 4x + 5$

Opción correcta: C)
Resolución
El polinomio cociente de la división entre P y Q es $x^2 - 4x + 5$. Para obtener la respuesta hay que elevar ese polinomio al cuadrado y, luego, multiplicarlo por -3. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

$(a; b; 2a; -b)$ es la solución del sistema lineal: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 13 \\ 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Elegí la única opción que muestra los valores de a y de b.

A) $a = -1$ y $b = 2$

B) $a = -2$ y $b = 1$

C) $a = 2$ y $b = -1$

D) $a = 2$ y $b = 1$

Opción correcta: C)
Resolución
Si resolvés el sistema, vas a encontrar que es compatible determinado. Al igualar coordenada a coordenada la solución $(2; -1; 4; 1)$ obtenida con $(a; b; 2a; -b)$ podés determinar los valores de a y de b. Otro recorrido posible es que como sabemos que $(a; b; 2a; -b)$ es la solución del sistema, alcanza con reemplazar estas coordenadas en cada ecuación para obtener los valores de a y b. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá las matrices: $A = \begin{pmatrix} g & 4 & f \\ 2 & g & -1 \\ f & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$. Elegí la opción que contiene los valores que g y f que satisfacen la ecuación $A \cdot B = C$.

A) $g = -9,\ f = 6$

B) $g = -6,\ f = 9$

C) $g = 6,\ f = -9$

D) $g = 9,\ f = -6$

Opción correcta: D)
Resolución
Si realizás el producto $A \cdot B$ se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} -f - 2g + 4 \\ g - 3 \\ -2f - 4 \end{pmatrix}$. Si se iguala esa matriz a C se obtienen los valores de g y de f. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuyas expresiones funcionales son, respectivamente: $H(x_1; x_2; x_3) = (-x_3; x_1 + x_2)$ y $T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_3; -x_2; x_3)$. Indicá la única opción que muestra el vector que surge de realizar $H \circ T^{-1}(1; 0; -3)$.

A) $(-2; 0; -3)$ B) $(0; 0)$ C) $(3; -2)$ D) $(3; 4)$

Opción correcta: C)

Resolución

Para resolver este ejercicio, usamos que $H \circ T^{-1}(1; 0; 3) = H(T^{-1}(1; 0; -3))$ y entonces, primero debemos hallar la preimagen por T del vector $(1; 0; -3)$ para luego, a ese vector resultado, aplicarle la transformación lineal H. Al resolver la ecuación $T(x_1; x_2; x_3) = (1; 0; -3)$, obtendremos que $T^{-1}(1; 0; -3) = (-2; 0; -3)$ y luego, $H(-2; 0; -3) = (3; -2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

La matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3m \\ 0 & m & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$ tal que se cumple que T es epimorfismo. Indicá la opción que muestra todos los valores de m posibles.

A) $\{1\}$ B) $\mathbb{R} \setminus \{-9; 9\}$ C) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ D) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Opción correcta: D)

Resolución

Podemos decir que el hecho de que T tenga el mismo conjunto de llegada que de partida implica que: si T es epimorfismo también será monomorfismo y por lo tanto T inversible. Pensar que la matriz de T es inversible es equivalente a decir que su determinante es distinto de 0. Al plantear el determinante de la matriz de T observamos que nos da: $-9m^2 + 9$, con lo cual este se anula solo para $m \pm 1$, para los demás valores el determinante es distinto de cero y la matriz inversible, por lo tanto será epimorfismo. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11 y 12.
