UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 11/06/25 - Tema 3

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

  Considerá la ecuación $z^3 = (1-i)(1-2i)^3$ y elegí, de los siguientes, el menor $arg\left(\dfrac{z}{1-2i}\right)$.

  A) $\dfrac{5\pi}{12}$ B) $\dfrac{7\pi}{12}$ C) $\dfrac{7\pi}{4}$ D) $\dfrac{11\pi}{12}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Si $z^3 = (1-i)(1-2i)^3$ nos queda que $(\frac{z}{1-2i})^3 = (1-i)$, entonces debemos buscar entre las raíces cúbicas de $1-i$, el menor argumento. Nos queda que es $\frac{7\pi}{12}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

  Sabiendo que $|z| \neq 0$ y $(\overline{z})^2 + z|z| = 0$, elegí la opción que muestra la suma de los argumentos de las soluciones de la ecuación.

  A) 2 B) 3π C) π D) $\dfrac{\pi}{3}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Como $|z| \neq 0$ entonces si:

  - $(\overline{z})^2 + z|z| = 0$
  - $z = |z|(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))$
  - $(\overline{z})^2 = |z|^2(\cos(-2\alpha) + i\text{sen}(-2\alpha))$

  Entonces
  $(\cos(-2\alpha) + i\text{sen}(-2\alpha)) =$
  $(\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi))(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))$
  De donde:

  - $\alpha_1 = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$
  - $\alpha_2 = -\pi = \pi$
  - $\alpha_3 = -\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

  Luego: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\pi$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

  Elegí la opción que muestra los polinomios cociente y resto que resultan de dividir $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x + 5$ por $Q(x) = x^2 - x + 2$.

  A) Cociente: $x^3 - 2x^2 + 4$. Resto: $-3x + 3$
  B) Cociente: $x^3 - 2x^2 + 4$. Resto: $3x - 3$
  C) Cociente: $x^3 + x^2 + 5x + 5$. Resto: $x^3 - 2x^2 + 4$
  D) Cociente: $3x - 3$. Resto: $x^3 - 2x^2 + 4$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  El cociente y el resto de dividir P por Q se obtienen por medio del algoritmo de la división. En particular, se puede comprobar que $(x^3 - 2x^2 + 4)(x^2 - x + 2) + (3x - 3) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x + 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

 Considerá $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio de grado mínimo tal que $P(\sqrt{5}) = 0$, i es raíz doble y $P(-2) = -75$. Elegí la única opción que muestra un polinomio P que verifica todas las condiciones enunciadas.

A) $P(x) = 3x^6 - 9x^4 - 27x^2 - 15$

B) $P(x) = 3x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 15$

C) $P(x) = x^4 - 4x^2 - 5$

D) $P(x) = x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 5$

Opción correcta: A)

Resolución

Con las condiciones pedidas, el polinomio $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ puede ser escrito en forma factorizada como $P(x) = a(x-i)^2(x+i)^2(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$. El dato $P(-2) = -75$ permite calcular el coeficiente principal a y obtener la respuesta del problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

 Considerá el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

Elegí la única opción que muestra su conjunto solución.

A) $\{(1;1;0;0)\}$

B) $\{\alpha(1;-9;2;1) + (-1;10;-2;0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

C) $\{(1;-9;2;1)\}$

D) $\{(1;-9;2;1) + \alpha(-1;10;-2;0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

Opción correcta: B)

Resolución

Si se escribe el sistema en forma matricial y se lo triangula, una posible forma de escribir el conjunto solución es $(-1 + x_4; 10 - 9x_4; -2 + 2x_4; x_4)$. De esta expresión se puede encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz $A^2 \cdot A^t$.

A) -9261

B) -21

C) 9261

D) 441

Opción correcta: A)

Resolución

El determinante de la matriz pedida se puede resolver aplicando propiedades:

$\det[A^2 \cdot A^t] = \det(A^2) \cdot \det(A^t) = [\det(A)]^2 \cdot \det(A) = [\det(A)]^3$. Es decir, elevar al cubo el determinante de la matriz A permite elegir la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá $a, b \in \mathbb{R}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial canónica es la siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & a & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & a & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Indicá la única opción que muestra los valores de a y b para que se cumpla que $T(b; 2; 0; -1) = (8; 7; 5)$.

A) $a = 3$ y $b = 6$

B) $a = 2$ y $b = 7$

C) $a = 0{,}5$ y $b = 1$

D) $a = 2$ y $b = 6$

Opción correcta: D)

Resolución

Al multiplicar la matriz de T por $\begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ se obtiene $\begin{pmatrix} 2a + b - 2 \\ b + 1 \\ 2a + 1 \end{pmatrix}$, luego igualando coordenada a coordenada con $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ se deducen los valores de a y b buscados. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal, $T(x_1; x_2; x_3; x_4) = (-x_2 + x_3; 5x_2; 0)$. Indicá cuál de las siguientes afirmaciones sobre T es la única verdadera.

A) T tiene un núcleo de dimensión 2.

B) T admite inversa.

C) La matriz asociada a T es cuadrada.

D) T es epimorfismo.

Opción correcta: A)

Resolución

Lo que podemos ver es que T parte de $\mathbb{R}^4$ por lo que la imagen de T se puede calcular como $< T(1;0;0;0); T(0;1;0;0); T(0;0;1;0); T(0;0;0;1) >=< (0;0;0); (-1;5;0); (1;0;0); (0;0;0) >= =< (-1;5;0); (1;0,0) >$ deduciendo que la dimensión de la imagen de T es 2. Luego, la transformación lineal no puede ser epimorfismo ya que el espacio de llegada es $\mathbb{R}^3$. Como consecuencia de lo anterior, tampoco se trata de una transformación lineal inversible y su matriz no será cuadrada. Del teorema de la dimensión podemos deducir que $4 = 2 + \dim(NuT)$ por lo que la dimensión del núcleo es 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.
