UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 11/06/25 - Tema 2

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

 Considerá el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

 Elegí la única opción que muestra su conjunto solución.

 A) $\{(10; -1; -2; 0)\}$

 B) $\{(-9; 1; 2; 1) + \alpha(10; -1; -2; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

 C) $\{(-9; 1; 2; 1)\}$

 D) $\{\alpha(-9; 1; 2; 1) + (10; -1; -2; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

 Opción correcta: D)
 Resolución
 Si se escribe el sistema en forma matricial y se lo triangula, una posible forma de escribir el conjunto solución es $(10 - 9x_4; -1 + x_4; -2 + 2x_4; x_4)$. De esta expresión se puede encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

 Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

 Elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot A^4$.

 A) 2197 B) 28561 C) -2197 D) 169

 Opción correcta: C)
 Resolución
 El determinante de la matriz pedida se puede resolver aplicando propiedades:
 $\det[A^{-1} \cdot A^4] = \det(A^{-1}) \cdot [\det(A)]^4 = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\det(A)]^4 = [\det(A)]^3$. Es decir, elevar al cubo el determinante de la matriz A permite elegir la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

 Considerá $m, n \in \mathbb{R}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial canónica es la siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & n & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & n & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Indicá la única opción que muestra los valores de n y m para que se cumpla que $T(m, -2, 0, 1) = (4, -7, 7)$.

 A) $m = 6$ y $n = -4$

 B) $m = -6$ y $n = -4$

 C) $m = -10$ y $n = -0{,}5$

 D) $m = -4$ y $n = -6$

 Opción correcta: B)
 Resolución
 Al multiplicar la matriz de T por $\begin{pmatrix} m \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se obtiene $\begin{pmatrix} m - 2n + 2 \\ m - 1 \\ -2n - 1 \end{pmatrix}$, luego igualando coordenada a coordenada con $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ se deducen los valores de m y n buscados. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal, $T(x_1; x_2; x_3) = (-x_2+x_3; x_2; 0; x_1)$. Indicá cuál de las siguientes afirmaciones sobre T es la única verdadera.

A) T es epimorfismo.

B) La matriz asociada de T es cuadrada.

C) T es monomorfismo.

D) La dimensión del núcleo de T es 1.

Opción correcta: C)

Resolución

Lo que podemos ver es que T parte de $\mathbb{R}^3$ por lo que la imagen de T se puede calcular como $< T(1;0;0); T(0;1;0); T(0;0;1) >=< (0;0;0;1); (-1;1;0;0); (1;0;0;0)$ por lo que la dimensión de la imagen de T es 3 y la transformación lineal no es epimorfismo ya que el espacio de llegada es $\mathbb{R}^4$. Del teorema de la dimensión podemos deducir que $3 = 3 + \dim(NuT)$ por lo que la dimensión del núcleo es 0 y T es monomorfismo. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá la ecuación $z^3 = (1+i)(5+3i)^3$ y elegí, de los siguientes, el menor $arg\left(\dfrac{z}{5+3i}\right)$.

A) $\dfrac{\pi}{4}$

B) $\dfrac{3\pi}{4}$

C) $\dfrac{\pi}{24}$

D) $\dfrac{\pi}{12}$

Opción correcta: D)

Resolución

Si $z^3 = (1+i)(5+3i)^3$ entonces $(\frac{z}{5+3i})^3 = (1+i)$ entonces debemos buscar las raíces cúbicas de $1+i$, cuyo menor argumento es $\frac{\pi}{12}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Sabiendo que $|z| \neq 0$ y $z^2 + (\overline{z})|z| = 0$, elegí la opción que muestra la suma de los argumentos de las soluciones de la ecuación.

A) 2

B) π

C) 3π

D) $\dfrac{\pi}{3}$

Opción correcta: C)

Resolución

Como $|z| \neq 0$ entonces si:

- $z^2 + (\overline{z})|z| = 0$
- $z = |z|(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))$
- $z^2 = |z|^2(\cos(2\alpha) + i\text{sen}(2\alpha))$

Entonces

$\cos(2\alpha) + i\text{sen}(2\alpha) =$

$(\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi))(\cos(-\alpha) + i\text{sen}(-\alpha))$

De donde:

- $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$
- $\alpha_2 = \pi$
- $\alpha_3 = \frac{5\pi}{3}$

Luego: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\pi$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra los polinomios cociente y resto que resultan de dividir $P(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x - 5$ por $Q(x) = x^2 - x + 2$.

  A) Cociente: $x^3 - 2x^2 - 8x - 4$. Resto: $x^2 - x + 2$

  B) Cociente: $x^3 - 2x^2 - 8x - 4$. Resto: $-13x - 3$

  C) Cociente: $x^3 - 2x^2 - 8x - 4$. Resto: $13x + 3$

  D) Cociente: $13x + 3$. Resto: $x^3 - 2x^2 - 8x - 4$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  El cociente y el resto de dividir P por Q se obtienen por medio del algoritmo de la división. En particular, se puede comprobar que $(x^3-2x^2-8x-4)(x^2-x+2)+(13x+3) = x^5-3x^4-4x^3+x-5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio de grado mínimo tal que $P(-\sqrt{3}) = 0$, i es raíz doble y $P(-1) = -16$. Elegí la única opción que muestra un polinomio P que verifica todas las condiciones enunciadas.

  A) $P(x) = x^6 - x^4 - 5x^2 - 3$

  B) $P(x) = 2x^6 - 2x^4 - 10x^2 - 6$

  C) $P(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

  D) $P(x) = 2x^6 + 2x^4 + 10x^2 + 6$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Con las condiciones pedidas, el polinomio $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ puede ser escrito en forma factorizada como $P(x) = a(x-i)^2(x+i)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. El dato $P(-1) = -16$ permite calcular el coeficiente principal a y obtener la respuesta del problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
