UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 11/06/25 - Tema 10

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & k \\ 0 & k^2 & 3 \end{pmatrix}$. Elegí la única opción que indica el/los valores de k para el/los cual/es la matriz admite inversa.

A) $k \neq -\sqrt{3}, k \neq \sqrt{3}$

B) $k = -\sqrt{3}, k = \sqrt{3}$

C) Para ningún valor del número real k.

D) $k \in \mathbb{R}$

Opción correcta: A)
Resolución
Si calculás el determinante de la matriz A, obtenés la expresión $-4k^2 + 12$. Ésta debe ser distinta de cero para que la matriz admita inversa y eso se verifica para los valores de k distintos a $-\sqrt{3}$ y a $\sqrt{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 + x_4 & = 2 \end{cases}$

Elegí la opción que muestra la clasificación para este sistema en función de su solución.

A) Sistema no homogéneo y compatible indeterminado.

B) Sistema no homogéneo y compatible determinado.

C) Sistema homogéneo y compatible determinado.

D) Sistema incompatible.

Opción correcta: B)
Resolución
El sistema que se ofrece no es homogéneo por lo que podés descartar una opción. Si lo resolvés, vas a poder expresar su conjunto solución como $(1; 2; 0; -1)$. Luego el sistema no es homogéneo y tiene solución única. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de la cual se conoce que $T(0; 1; 0) = (1; 4; 2; 0)$, $T(1; 0; 0) = (0; 4; 2; 0)$ y $T(0; 0; 1) = (1; 0; 0; 0)$.
Indicá cuál de las siguientes afirmaciones, acerca de T, es la única correcta.

A) $dim(Imagen(T)) = 3$

B) T es isomorfismo.

C) T es monomorfismo.

D) $dim(Nu(T)) = 1$

Opción correcta: D)
Resolución
Con los datos ofrecidos, es posible dar con el conjunto imagen de T : $\langle(1; 4; 2; 0), (0; 4; 2; 0), (1; 0; 0; 0)\rangle$. Al analizar este subespacio, se llega a que tiene dimensión 2, puesto que se trata de un conjunto linealmente dependiente, el primero de los vectores es la suma de los otros dos; entonces A) es falsa. También B) es falsa, porque el conjunto de llegada de T es $\mathbb{R}^4$, no podría ser epimorfismo, por lo tanto tampoco isomorfismo. Por el teorema de la dimensión arribamos a que $dim(\mathbb{R}^3) = dim(Nu(T)) + dim(Imagen(T))$, de donde deducimos que $dim(NuT) = 1$ y en consecuencia, C) es falsa y D) es la única afirmación verdadera. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Considerá la transformación lineal de expresión $T(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; x_1 - x_3)$ y el subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 5x_2 = 0; x_3 = 0\}$. Indicá la opción que muestra el subespacio H , tal que $T(H) = S$.

  A) $\langle(-5; 1; 0)\rangle$

  B) $\{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$

  C) $\langle(5; 1; 0); (0; 0; 1)\rangle$

  D) $\{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0; x_1 + 5x_2 = 0\}$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Lo primero que podemos hallar son los generadores de S a partir de las ecuaciones que lo definen, nos que queda $S = \langle(-5; 1; 0)\rangle$. Al aplicarle T al subespacio de la primera opción no nos devuelve S, tampoco con el de la tercera opción. La segunda opción corresponde a un subespacio de dimensión 2 al aplicarle T, por lo que también la desestimamos. La opción correcta es la última, dado que indica el subespacio $\langle(-5; 1; -5)\rangle$ y al aplicarle T obtenemos el subespacio S. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Considerá $z \in \mathbb{C}$. Indicá la única opción que contiene una de las soluciones de la ecuación $z - 2i = z^{-1}$

  A) 0 B) $2i$ C) i D) $3i$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  A la ecuación $z - 2i = z^{-1}$ la podemos reescribir como $z^2 - 2iz - 1 = 0$. Usando ahora la fórmula resolvente queda que la única raíz es i.Luego, buscando entre las opciones, la única correcta es la C). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Considerá $z = \dfrac{1}{3}i^6(3 + 3i)^2 \cdot \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.
  Indicá la única opción que muestra la forma binomial de z

  A) $6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$

  B) $6\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i$

  C) -6

  D) 6

  Opción correcta: D)
  Resolviendo las operaciones indicadas, recordando que $i^2 = -1$
  y que $(3 + 3i)^2 = 9(1 + i)^2$ nos queda:
  $z = \frac{1}{3}i^6(3 + 3i)^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$
  $= 6(\cos(2\pi) + i\text{sen}(2\pi))$
  $= 6.$
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

 Considerá los polinomios $f(x) = x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 7x + c$ y $g(x) = x^2 + 2x - 8$, donde $c \in \mathbb{R}$. Si se sabe que $f(x)$ es divisible por $(x + 5)$, elegí la única opción que muestra el polinomio resto de la división entre $f(x)$ por $g(x)$.

A) $23x + 87$

B) 87

C) $x^2 + 6x + 9$

D) 0

Opción correcta: A)
Resolución
Como $x + 5$ divide a f luego $f(-5) = 0$. Esta ecuación permite hallar $c = 15$. Con este dato, solo resta hacer el cociente entre f y g para encontrar el polinomio resto de esa división. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

 Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 7x + 21$. Si i es raiz de P, elegí la opción que muestra su factorización en $\mathbb{C}$.

A) $(x - 3)(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})(x^2 + 1)$

B) $(x - 3)(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})(x - i)(x + i)$

C) $(x - 3)(x^2 - 7)(x - i)(x + i)$

D) $(x - 3)(x^2 - 7)(x^2 + 1)$

Opción correcta: B)
Resolución
Como i es raiz de P también es raiz $-i$. Luego $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ divide a P. Entonces $P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 7x + 21 = (x^3 - 3x^2 - 7x + 21)(x - i)(x + i)$. Por el lema de Gauss se obtiene que $x = 3$ es raiz de P. Luego: $P(x) = (x^2 - 7)(x - 3)(x - i)(x + i)$. De esta última expresión se obtiene la factorización buscada sabiendo que $x = \sqrt{7}$ y $x = -\sqrt{7}$ también son raíces de P. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
