UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er parcial - 23/04/25 - Tema 9

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que se verifican las siguientes condiciones: $\vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{1}{18}$, la norma de $\vec{v}$ es $\frac{4}{3}$ y $\vec{w} = \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$. Elegí la única opción que muestra el valor de $\cos(\alpha)$ si α es el ángulo determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

  A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{1}{22}$ C) $92,605$ D) $\frac{1}{22}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  La fórmula para hallar el ángulo entre dos vectores: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||}$. Si se reemplazan los datos del problema en esta igualdad, resulta: $\cos(\alpha) = \frac{-\frac{1}{18}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{11}{12}}$de donde se deduce la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  Al vector $\vec{u} = \left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$ se le aplica una dilatación $\beta \in \mathbb{R}$ y, luego una traslación de dirección $(-5; 2; 3)$ y se obtiene el vector $(-3; 1; 6)$. Elegí la única opción que muestra el valor de β.

  A) -5 B) $-\frac{1}{5}$ C) 5 D) $\frac{1}{5}$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  La ecuación vectorial $\beta \left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right) + (-5; 2; 3) = (-3; 1; 6)$ permite encontrar el vector de β. Si se expresa el primer término como un solo vector, aplicando las operaciones correspondientes, y se iguala coordenada a coordenada, se podrá obtener el valor de β. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Indicá la opción que muestra al plano que contiene a las rectas:
  $L_1 = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : \beta(-8; 1; 4) + (0; 0; 1), \beta \in \mathbb{R}\}$
  $L_2 = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y = 0; -y + z = 1\}$

  A) $3x - 24y + 12z = 0$ C) $-3x + 24y - 12z = -12$
  B) $-3x + 24y - 12z = 12$ D) $-8x + y + 4z = 1$

  Opción correcta:C)
  Resolución
  Un plano que contiene a las dos rectas tiene un vector normal que resulta ortogonal a ambas, para hallarlo podemos hacer el producto vectorial entre las direcciones de las rectas. La dirección de L_1 es $(-8; 1; 4)$; y para hallar la dirección de L_2 podemos primero llevarla a su forma vectorial, la que nos queda $(4; 1; 1)\alpha + (0; 0; 1)$, por lo que su dirección es $(4; 1; 1)$. Entonces, la normal del plano es $(-8; 1; 4) \times (4; 1; 1) = (-3; 24; -12)$. Se puede chequear que el punto de intersección entre las rectas es el $(0, 0, 1)$. Con estos datos podemos construir el plano y nos queda $-3x + 24y - 12z = -12$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Indicá la única opción que muestra los puntos de la recta
  $L = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : (x; y; z) = \lambda \left(\frac{1}{4}; -1; 1\right) + (2; 0; -3), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ que están a distancia $\sqrt{83}$ del punto $A = (2; 5; 2)$.

  A) $(3; -4; 1)$ y $(1; 4; -7)$ C) $(1; -6; 6)$ y $(-1; -1; 1)$
  B) $(3; 4; 1)$ D) $(85; 5; 2)$ y $(2; 5; 85)$

  Opción correcta: A)

Resolución
Por un lado, las coordenadas del punto buscado tiene que escribirse como $\left(\frac{1}{4}\lambda + 2; -\lambda; \lambda - 3\right)$. Siguiendo, como queremos que está a distancia $\sqrt{83}$ de A, planteamos la ecuación: $||\left(\frac{2}{4}\lambda + 2; -\lambda; \lambda - 3\right) - (2; 5; 2)|| = \sqrt{83}$ desde allí se pueden hallar los valores de λ que son ± 4, y para estos valores se obtienen los puntos buscados. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  El conjunto $S = \{(1; -1; 2), (1; -3; 2), (-1; -3; -2)\}$ es linealmente dependiente. Elegí la terna de valores que corresponde a los coeficientes de la combinación lineal entre los vectores de S igual al vector nulo.

  A) $\lambda = 3, \mu = -2, \nu = -1$
  B) $\lambda = -3, \mu = -2, \nu = -1$
  C) $\lambda = -3, \mu = 1, \nu = -1$
  D) $\lambda = 3, \mu = -2, \nu = 1$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  A partir de plantear la combinación lineal $\lambda \cdot (1; -1; 2) + \mu \cdot (1; -3; 2) + \nu \cdot (-1; -3; -2) = (0; 0; 0)$ obtenemos el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = 0 \\ -\lambda - 3\mu - 3\nu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu - 2\nu = 0 \end{cases}$$

  el cual tiene como solución no trivial que $\lambda = 3\nu$ y $\mu = -2\nu$, con ν pudiendo tomar cualquier valor con lo cual dándoles valores a este último tenemos que la única terna que es solución del sistema es $\nu = 1, \lambda = 3, \mu = -2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Considerá el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge x_5 = 0\}$. Elegí la terna de valores que hace que el vector $(\alpha; \beta; \gamma; \gamma; 0)$ pertenezca a S.

  A) $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = -4$
  B) $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 4$
  C) $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 4$
  D) $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = 4$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  De las ecuaciones que definen S, podemos notar que basta con que $\alpha + \beta = \gamma$ para que el vector pertenezca a S. La única terna que cumple esta condición es la C). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Indica la opción que corresponde a la ecuación de una circunferencia que tiene el mismo centro que $x^2 + y^2 - 6x + 11y - 41{,}75 = 0$ y cuyo radio es la mitad del de ésta.

  A) $x^2 + y^2 - 6x + 11y - 1{,}25 = 0$
  B) $x^2 + y^2 - 6x + 11y + 19 = 0$
  C) $x^2 + y^2 + 6x - 11y + 19 = 0$
  D) $x^2 + y^2 + 6x - 11y - 1{,}25 = 0$

  Opción correcta:B)
  Resolución
  Al completar cuadrados en la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 11y - 41{,}75 = 0$ se obtiene $(x-3)^2 + (y+5{,}5)^2 = 81$. La ecuación de la circunferencia pedida es ofrecida en la opción B) ya que tiene el mismo centro $(3; 5{,}5)$ y radio $r = \frac{9}{2} = 4{,}5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

  Elegí la opción que muestra las coordenadas de los focos de la cónica de ecuación $-4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 4 = 0$.

  A) $(-1; 2 + \sqrt{13}), (-1; 2 - \sqrt{13})$

  B) $(2 + \sqrt{5}; -1), (2 - \sqrt{5}; -1)$

  C) $(2 + \sqrt{13}; -1), (2 - \sqrt{13}; -1)$

  D) $(-1; 2 + \sqrt{5}), (-1; 2 - \sqrt{5})$

  Opción correcta: A)

  Resolución

  Con el procedimiento de completar cuadrados podemos escribir la ecuación de la hipérbola $-4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 4 = 0$ como $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$.Resulta ser una hipérbola de eje focal vertical en $x = -1$. Con la relación pitagórica entre los parámetros se puede obtener $c = \sqrt{13}$. Luego, la abscisa de los focos es -1 y la ordenada se obtiene de sumar o restar el valor de c a la ordenada del centro $(-1; 2)$ de la hipérbola. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.