UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er parcial - 23/04/25 - Tema 6

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá los vectores $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ y $\vec{w} = (7; 5; -8)$. Si el punto medio entre los vectores es $(9; 10; -2)$, elegí la opción que muestra la norma del vector $\vec{v}$.

A) $\sqrt{362}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{255}$ D) $\sqrt{262}$

Opción correcta: A)

Resolución

Si $(9; 10; -2)$ es el punto medio entre los vectores, se pueden calcular las coordenadas de $\vec{v}$ planteando que: $\frac{v_x+7}{2} = 9$, $\frac{v_y+5}{2} = 10$, $\frac{v_z-8}{2} = -2$. De estas ecuaciones se obtiene que $\vec{v} = (11; 15; 4)$ y que su norma es $\sqrt{362}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá los puntos $(4; 7; 3)$ y $(k; 10; -k), k \in \mathbb{R}$. Elegí la opción que muestra todos los valores de k de manera tal que la distancia entre los puntos sea $\sqrt{118}$.

A) $k = \sqrt{42}, k = -\sqrt{42}$ C) $k = 118, k = -118$

B) $k = \sqrt{58}, k = -\sqrt{58}$ D) $k = 7, k = -6$

Opción correcta: D)

Resolución

Si planteás la fórmula de distancia entre dos puntos, obtendrás la ecuación
$(4-k)^2 + (7-10)^2 + (3+k)^2 = (\sqrt{118})^2$, de donde se deduce que $k = 7, k = -6$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra una recta que resulta paralela al plano $\Pi : y - 2z = 0$ y ortogonal a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(4; 0; 1) + (1; -2; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

A) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1; 8; -4) + (1; -2; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$

B) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1; -8; -4) + (1; -2; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$

C) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(-1; 0; 4) + (1; -2; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$

D) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(0; 1; -2) + (1; -2; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$

Opción correcta: B)

Resolución

La dirección de una recta que cumple las dos características pedidas se puede hallar realizando el producto vectorial entre la dirección de la recta L y el vector normal del plano Π. Esto nos da como resultado el vector $(1; -8; -4)$ que es ortogonal a la recta y paralelo al plano por ser ortogonal a su normal. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

El ángulo entre los planos $\Pi_1 : -3kx + y - z = 1$ y $\Pi_2 : x + 3ky - z = 3$ es $\frac{\pi}{3}$.
Indicá la opción que muestra el valor de $k \in \mathbb{R}$.

A) 1 B) $\pm\frac{2}{3}$ C) 0 D) $\sqrt{2}$

Opción correcta: C)

Resolución

Como el ángulo entre planos se obtiene mirando el ángulo agudo que se forma entre los vectores normales de ambos, podemos usar la definición de producto escalar entre vectores podemos plantear la ecuación: $(-3k; 1; -1) \cdot (1; 3k; -1) = ||(-3k; 1; -1)||.||(1; 3k; -1)||.cos(\frac{\pi}{3})$ y despejar k. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Considerá el subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 0\}$. Indicá la única opcion correcta.

A) La dimensión de S es 3.

B) El conjunto $\{(1;0;1;0), (0;1;0;0), (0;0;0;1)\}$ es un sistema de generadores del subespacio S.

C) El conjunto $\{(1;0;-1), (0;1;0)\}$ es una base del subespacio S.

D) El vector $(2;-1;1;1)$ pertenece al subespacio S.

Opción correcta: A)
Resolución
El vector $(1;0;1;0)$ no cumple la ecuación que define el subespacio S, lo mismo que el vector $(2;-1;1;1)$, con lo cual D) y B) son falsas.Como el conjunto $\{(1;0;-1), (0;1;0)\}$ no pertenece a $\mathbb{R}^4$, tampoco es válida la afirmación C). La afirmación correcta es la A) dado que los vectores que pertenecen a S son de la forma $(x_1; x_2; -x_1; x_4)$. Estos contenidos los encontrás en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Decidí cuál es el valor de k para que el vector $(2;-1;k)$ sea una combinación lineal de $(1;1;-1)$ y $(2;-1;1)$.

A) $k = 1$ B) $k = -1$ C) $k = -2$ D) $k = 2$

Opción correcta: A)
Resolución
A partir de la ecuación $(2;1;k) = \alpha(1;1;-1) + \beta(2;-1;1)$ tenemos que las dos primeras componentes nos devuelven el sistema:

$$\begin{cases} 2 = \alpha + 2\beta \\ -1 = \alpha - \beta \end{cases}$$

A partir de este sistema obtenemos $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. En la tercer componente tenemos $k = -\alpha + \beta$, reemplazando en esta los valores obtenidos tenemos: $k = 0 + 1 = 1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
Considerá la elipse de ecuación $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ y elegí la opción que contiene las coordenadas de los focos y el valor de la excentricidad.

A) $F_1 = (-4; 2 - \sqrt{7}), F_2 = (-4; 2 + \sqrt{7}), e = \frac{\sqrt{7}}{3}$

B) $F_1 = (4; 2 - \sqrt{7}), F_2 = (4; 2 + \sqrt{7}), e = \frac{4}{3}$

C) $F_1 = (-4; 2 - \sqrt{7}), F_2 = (-4; 2 + \sqrt{7}), e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

D) $F_1 = (-4; -2 - \sqrt{7}), F_2 = (-4; -2 + \sqrt{7}), e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Opción correcta: C)
Resolución
La elipse de ecuación $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ tiene como semiejes a $a = 4$ y $b = 3$. Luego se verifica que $16 = 4 + c^2$ de donde $|c| = \sqrt{7}$. Como el centro de la misma es el punto $(-4; 2)$ entonces los focos son $(-4; 2 - \sqrt{7})$ y $(-4; 2 + \sqrt{7})$. Su excentricidad se calcula como: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá la circunferencia de centro $\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$ y radio$\sqrt{5}$. Elegí la única afirmación verdadera.

  A) El punto $\left(-1; \frac{\sqrt{41}}{3} + \frac{1}{2}\right)$ pertenece a la circunferencia.

  B) La circunferencia es tangente al eje de las ordenadas.

  C) Su ecuación canónica es $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 25$

  D) La circunferencia contiene al origen de coordenadas.

Opción correcta: A)
Resolución
Si se escribe la ecuación canónica de la circunferencia a partir de los datos del enunciado, se obtiene $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 5$ por lo que puede descartarse la opción C. La opción B tampoco es válida porque al resolver la ecuación $\left(0 + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 5$ se obtienen dos soluciones. La opción D también puede ser descartada porque el punto $(0; 0)$ no verifica la ecuación de la circunferencia. Solo resta probar que el punto de la opción A verifica la ecuación de la circunferencia. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.