UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er parcial - 23/04/25 - Tema 5

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ y $\vec{w} = (8; 5; -7)$. Si el punto medio entre los vectores es $(10; 9; -3)$, elegí la opción que muestra la norma del vector $\vec{v}$.

  A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{155}$ C) $\sqrt{214}$ D) $\sqrt{314}$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Si $(10; 9; -3)$ es el punto medio entre los vectores, se pueden calcular las coordenadas de $\vec{v}$ planteando que: $\frac{v_x+8}{2} = 10$, $\frac{v_y+5}{2} = 9$, $\frac{v_z-7}{2} = -3$. De estas ecuaciones se obtiene que $\vec{v} = (12; 13; 1)$ y que su norma es $\sqrt{314}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  Considerá los puntos $(3; 7; 4)$ y $(-k; 10; k), k \in \mathbb{R}$. Elegí la opción que muestra todos los valores de k de manera tal que la distancia entre los puntos sea $\sqrt{74}$.

  A) $k = 74, k = -74$ C) $k = 5, k = -4$
  B) $k = 6, k = -6$ D) $k = \sqrt{20}, k = -\sqrt{20}$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  Si planteás la fórmula de distancia entre dos puntos, obtendrás la ecuación
  $(3+k)^2 + (7-10)^2 + (4-k)^2 = (\sqrt{74})^2$, de donde se deduce que $k = 5, k = -4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Indicá la opción que muestra una recta que resulta paralela al plano $\Pi : x + 2z = 0$ y ortogonal a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1; -2; 1) + (0; -4; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

  A) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(4; -1; 2) + (1; -2; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$
  B) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(-4; -1; 2) + (1; 0; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$
  C) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(2; 0; -1), \lambda \in \mathbb{R}\}$
  D) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(2; -4; 2) + (1; -2; 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  La dirección de una recta que cumple las dos características pedidas se puede hallar realizando el producto vectorial entre la dirección de la recta L y el vector normal del plano Π. Esto nos da como resultado el vector $(-4; -1; 2)$ que es ortogonal a la recta y paralelo al plano por ser ortogonal a su normal. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  El ángulo entre los planos $\Pi_1 : -2kx + y - z = 0$ y $\Pi_2 : x + 2ky - z = 1$ es $\frac{\pi}{3}$.
  Indicá la opción que muestra el valor de $k \in \mathbb{R}$.

  A) 0 B) $\sqrt{2}$ C) ± 1 D) $\pm\sqrt{2}$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Como el ángulo entre planos se obtiene mirando el ángulo agudo que se forma entre los vectores normales de ambos, podemos usar la definición de producto escalar entre vectores y plantear la ecuación: $(-2k; 1; -1) \cdot (1; 2k; -1) = ||(-2k; 1; -1)|| \cdot ||(1; 2k; -1)||.cos(\frac{\pi}{3})$ y despejar k. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá el subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_4 = 0\}$. Indicá la única opción correcta.

A) El vector $(3; 2; 1; 4)$ pertenece al subespacio S.

B) El conjunto $\{(1; 0; 0; -1), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0)\}$ es un sist. de generadores del subespacio S.

C) El conjunto $\{(1; 0; 0; -1), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0), (1; 1; 1; -1)\}$ es una base del subespacio S.

D) La dimensión de S es 3.

Opción correcta: D)
Resolución
Como de los vectores en $\{(1; 0; 0; -1), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0)\}$ el primero no cumple la ecuación que define el subespacio S entonces el conjunto no genera S, lo mismo que el vector $(3; 2; 1; 4)$, con lo cual A) y B) son falsas. Dado que $(1; 0; 0; -1) + (0; 1; 0; 0) + (0; 0; 1; 0) = (1; 1; 1; -1)$, tampoco es válida la afirmación C). La afirmación correcta es la D) dado que los vectores que pertenecen a S tienen la forma $(x_1; x_2; x_3; x_1)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Decidí cuál es el valor de k para que el vector $(-1; 2; k)$ sea una combinación lineal de $(1; 1; -1)$ y $(2; -1; 1)$.

A) $k = 1$ B) $k = -1$ C) $k = -2$ D) $k = 2$

Opción correcta: C)
Resolución
A partir de la ecuación $(-1; 2; k) = \alpha(1; 1; -1) + \beta(2; -1; 1)$ tenemos que las dos primeras componentes nos devuelven el sistema:

$$\begin{cases} -1 = \alpha + 2\beta \\ 2 = \alpha - \beta \end{cases}$$

A partir de este sistema obtenemos $\alpha = 1$ y $\beta = -1$. En la tercer componente tenemos $k = -\alpha + \beta$, reemplazando en esta los valores obtenidos tenemos: $k = -1 + (-1) = -2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la elipse de ecuación $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ y elegí la opción que contiene las coordenadas de los focos y el valor de la excentricidad.

A) $F_1 = (4; -2 - \sqrt{5}), F_2 = (4; -2 + \sqrt{5}), e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

B) $F_1 = (-4; 2 - \sqrt{5}), F_2 = (-4; 2 + \sqrt{5}), e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

C) $F_1 = (4; -2 - \sqrt{13}), F_2 = (4; -2 + \sqrt{13}), e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

D) $F_1 = (4; -2 - \sqrt{5}), F_2 = (4; -2 + \sqrt{5}), e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Opción correcta: D)
Resolución
La elipse de ecuación $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ tiene como semiejes a $a = 3$ y $b = 2$. Luego se verifica que $9 = 4 + c^2$ de donde $|c| = \sqrt{5}$. Como el centro de la misma es el punto $(4; -2)$ entonces los focos son $(4; -2 - \sqrt{5})$ y $(4; -2 + \sqrt{5})$. Su excentricidad se calcula como: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá la circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ y radio$\sqrt{6}$. Elegí la única afirmación verdadera.

A) Su ecuación canónica es $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=6$

B) La circunferencia es tangente al eje de las abscisas.

C) El punto $\left(1; -\frac{\sqrt{23}}{2}-\frac{2}{3}\right)$ pertenece a la circunferencia.

D) La circunferencia contiene al origen de coordenadas.

Opción correcta: C)
Resolución
Si se escribe la ecuación canónica de la circunferencia a partir de los datos del enunciado, se obtiene $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=6$ por lo que puede descartarse la opción A. La opción B tampoco es válida porque al resolver la ecuación $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0+\frac{2}{3}\right)^2=6$ se obtienen dos soluciones. La opción D también puede ser descartada porque el punto $(0;0)$ no verifica la ecuación de la circunferencia. Solo resta probar que el punto de la opción C verifica la ecuación de la circunferencia. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.