UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er parcial - 23/04/25 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá los subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$, $T = \langle(4; 2; -4), (-1; 0; 1), (-3; 4; -3)\rangle$, $R = \langle(1; 1), (-1; 1), (4; 5)\rangle$. Elegí la opción que contiene una afirmación verdadera.

A) $\dim(R) = 1$

B) $\langle(1; -1; 1)\rangle$ genera S.

C) $(1; 1; -1) \in S$

D) $\dim(T) = 3$

Opción correcta: D)

Resolución

Como $\{(1; 1), (-1; 1)\}$ es L.I. A) es falsa. Como $\dim(S) = 2$ sabemos que $\langle(1; 1; -1)\rangle$ NO genera todo S. Mientras que $(1; 1; -1)$ no cumple la ecuación que define S.
Como $\{(4; 2; -4), (-1; 0; 1), (-3; 4; -3)\}$ es L.I. tenemos que $\dim(T) = 3$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Decidí cuál de los siguientes vectores es la combinación lineal de $(1; -1; 2)$ y $(1; 1; 2)$.

A) $(2; 0; 4)$

B) $(1; 3; -2)$

C) $(-2; 4; 4)$

D) $(1; -4; 4)$

Opción correcta: A)

Resolución

Para obtener la respuesta correcta escribimos la combinación lineal obteniendo: $(1; -1; 2) + (1; 1, 2) = (2; 0; 4)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra la ecuación de la parábola de foco $(-2; 0{,}5)$ y directriz $y = 1{,}5$.

A) $x^2 - 4x + 2 + 2y = 0$

B) $x^2 - 4x + 8 - 2y = 0$

C) $x^2 + 4x + 2 + 2y = 0$

D) $x^2 + 4x + 8 - 2y = 0$

Opción correcta: C)

Resolución

La distancia entre el foco $(-2; 0{,}5)$ y la directriz $y = 1,5$ resulta $p = 1$. El vértice de la parábola se encuentra en el punto medio entre ambos y tiene la misma abscisa que el foco: $V = (-2; 1)$.Como la directriz resulta paralela al eje x , y el foco se encuentra por debajo de la directriz $-2p = -2$ y la ecuación de la parábola puede escribirse como: $(x + 2)^2 = -2(y - 1)$. Si se desarrolla esta expresión y se la expresa en forma implícita se obtiene: $x^2 + 4x + 2 + 2y = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Elegí la opción que indica las coordenadas del punto de intersección de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $3y^2 - 4x^2 - 12y + 8x - 28 = 0$.

A) $(-1; -2)$

B) $(2; 1)$

C) $(1; -2)$

D) $(1; 2)$

Opción correcta: D)

Resolución

El punto de intersección de las asíntotas es el centro de la hipérbola. Si se completan cuadrados en la ecuación $3y^2 - 4x^2 - 12y + 8x - 28 = 0$ se obtiene $\frac{(y-2)^2}{12} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$ se obtienen las coordenadas del punto buscado. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  El vector $(4; -3; 2)$ es ortogonal al vector $(p; 7; q)$ y también es ortogonal al vector $(-5; 3; -p)$. Elegí la única opción que muestra los valores de p y q.

  A) $p = -\frac{29}{2}, q = \frac{79}{2}$
  B) $p = -\frac{79}{2}, q = 0$
  C) $p = \frac{29}{2}, q = -\frac{25}{3}$
  D) $p = -\frac{29}{2}, q = \frac{79}{4}$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Si dos vectores son ortogonales, su producto escalar es cero. Podemos plantear las dos condiciones: $(4; -3; 2) \cdot (p; 7; q) = 0$ y $(4; -3; 2) \cdot (-5; 3; -p) = 0$. De allí se derivan dos ecuaciones de donde se pueden determinar p y q. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de norma 18 que resulta paralelo al vector $\left(\frac{2}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{1}{9}\right)$ es:

  A) $\vec{v} = \left(\frac{4}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{2}{9}\right)$
  B) $\vec{v} = (4; -4; 2)$
  C) $\vec{v} = (-12; 12; -6)$
  D) $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{17}}{9}; \frac{3\sqrt{17}}{9}; \frac{10}{9}\right)$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  Un vector paralelo a $\left(\frac{2}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{1}{9}\right)$ se puede escribir como: $\left(k \cdot \frac{2}{9}; -k \cdot \frac{2}{9}; k \cdot \frac{1}{9}\right)$ donde k es un número real distinto de cero. Para hacer cumplir que la norma de este vector sea 18, podemos plantear la ecuación: $\sqrt{\left(\frac{2k}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2k}{9}\right)^2 + \left(\frac{k}{9}\right)^2} = 18$ De allí despejamos los dos posibles valores de k y luego, con este dato, averiguamos las coordenadas posibles para $\vec{v}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Indicá la opción que muestra el/los valor/es de $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que el punto $A = (2; 6)$ sea la proyección ortogonal del punto $B = (4; -1)$ sobre la recta
  $L = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : (x; y) = \lambda\left(\frac{2}{k^2}; 7\right) + \left(1; \frac{40}{7}\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

  A) $k = \pm\frac{2}{7}$
  B) $k = \frac{7}{2}$
  C) $k = \frac{4}{49}$
  D) $k = \pm\frac{4}{3}$

  Opción correcta:A)
  Resolución
  Como sabemos que A es la proyección del punto B sobre la recta L, lo que se tiene que cumplir es que $B - A = (2; -7)$ sea ortogonal a la dirección de la recta. Podemos usar este dato y plantear: $(2; -7) \cdot \left(\frac{2}{k^2}; 7\right) = 0$, de donde podemos despejar, k. También se puede verificar que para estos valores de k el punto A resulta efectivamente un punto de la recta L. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá el plano Π_1 que contiene a los puntos $A = (1; 8; 4)$, $B = (0; 1; -1)$ y $C = (-2; 1; 3)$. Indicá la opción que muestra una ecuación del plano Π_2 que resulta paralelo a Π_1 y pasa por el punto $(0; 0; 1)$.

  A) $-2x + y - z = 0$
  B) $2x - y + z = -2$
  C) $-2x - y - z = -1$
  D) $2x - y + z = 1$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Lo primero que hacemos es hallar dos direcciones del plano, por ejemplo $C - A$ y $B - A$ resultan dos vectores directores del plano Π_1 y también del plano Π_2. Como en las opciones se ofrecen las ecuaciones implícitas debemos hallar el vector normal, eso lo hacemos realizando el producto vectorial entre las dos direcciones obteniendo $(28; -14; 14)$.

Luego, cuando que el plano pedido tiene que pasar por el punto $(0; 0; 1)$ nos queda su ecuación es $28x - 14y + 14z = 14$ o equivalentemente $2x - y + z = 1$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.
