

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá los subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$, $T = \langle (2; 1; -2), (-1; 0; 1), (-3; 4; 3) \rangle$, $R = \langle (1; 1; 2; 1), (2; 3; -1; 1), (4; 5; 3; 3) \rangle$. Elegí la opción que contiene una afirmación verdadera.

A) $\dim(R) = 3$

C) $\dim(T) = 2$

B) $\langle (1; 1; -1) \rangle$ genera S .

D) $(\sqrt{4}; 4; \sqrt{4}) \in S$

Opción correcta: C)

Resolución

Como $(2; 3; -1; 1) - 2(1; 1; 2; 1) = (0; 1; -5; -1)$ y $(4; 5; 3; 3) - 4(1; 1; 2; 1) = (0; 1; -5; -1)$ entonces

A) no es verdadera. Como $\dim(S) = 2$ sabemos que $\langle (1; 1; -1) \rangle$ NO genera todo S . Mientras que $(\sqrt{4}; 4; \sqrt{4})$ no cumple la ecuación que define S . Como $2(-1; 0; 1) + (2; 1; -2) = (0; 1; 0)$ y $2(-3; 4; 3) + 3(2; 1; -2) = (0; 11; 0)$ tenemos que $\dim(T) = 2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Decidí cuál de los siguientes vectores es la combinación lineal de $(1; -1; 2)$ y $(1; 1; 2)$.

A) $(-2; 0; 4)$

B) $(-1; 3; 2)$

C) $(-2; 4; 4)$

D) $(2; 4; 4)$

Opción correcta: D)

Resolución

Para obtener la respuesta correcta escribimos la combinación lineal obteniendo:

$-1(1; -1; 2) + 3(1; 1; 2) = (2; 4; 4)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra la ecuación de la parábola de foco $(2; -1,5)$ y directriz $y = -0,5$.

A) $x^2 - 4x + 6 + 2y = 0$

C) $x^2 - 4x + 4 - 2y = 0$

B) $x^2 + 4x + 6 + 2y = 0$

D) $x^2 + 4x + 4 - 2y = 0$

Opción correcta: A)

Resolución

La distancia entre el foco $(2; -1,5)$ y la directriz $y = -0,5$ resulta $p = 1$. El vértice de la parábola se encuentra en el punto medio entre ambos y tiene la misma abscisa que el foco: $V = (2; -1)$. Como la directriz resulta paralela al eje x , y el foco se encuentra por debajo de la directriz $-2p = -2$ y la ecuación de la parábola puede escribirse como: $(x - 2)^2 = -2(y + 1)$. Si se desarrolla esta expresión y se la expresa en forma implícita se obtiene: $x^2 - 4x + 6 + 2y = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Elegí la opción que indica las coordenadas del punto de intersección de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $-3x^2 + 4y^2 + 6x + 16y - 23 = 0$.

A) $(-1; 2)$

B) $(1; 2)$

C) $(1; -2)$

D) $(2; 1)$

Opción correcta: C)

Resolución

El punto de intersección de las asíntotas es el centro de la hipérbola. Si se completan cuadrados en la ecuación $-3x^2 + 4y^2 + 6x + 16y - 23 = 0$ se obtiene $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{12} = 1$ se obtienen las coordenadas del punto buscado. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

El vector $(2; -3; 4)$ es ortogonal al vector $(p; 6; q)$ y también es ortogonal al vector $(-2; 5; -p)$. Elegí la única opción que muestra los valores de p y q .

A) $p = \frac{19}{4}, q = \frac{55}{3}$

C) $p = -\frac{55}{8}, q = 0$

B) $p = -\frac{19}{4}, q = -\frac{25}{3}$

D) $p = -\frac{19}{4}, q = \frac{55}{8}$

Opción correcta: D)

Resolución

Si dos vectores son ortogonales, su producto escalar es cero. Podemos plantear las dos condiciones: $(2; -3; 4) \cdot (p; 6; q) = 0$ y $(2; -3; 4) \cdot (-2; 5; -p) = 0$. De allí se derivan dos ecuaciones de donde se pueden determinar p y q . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de norma 15 que resulta paralelo al vector $(\frac{2}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{1}{7})$ es:

A) $\vec{v} = (-\frac{\sqrt{10}}{7}; \frac{3\sqrt{10}}{7}; \frac{10}{7})$

C) $\vec{v} = (-70; 70; -35)$

B) $\vec{v} = (-10; 10; -5)$

D) $\vec{v} = (\frac{30}{7}; -\frac{30}{7}; \frac{15}{7})$

Opción correcta: B)

Resolución

Un vector paralelo a $(\frac{2}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{1}{7})$ se puede escribir como: $(k \cdot \frac{2}{7}; -k \cdot \frac{2}{7}; k \cdot \frac{1}{7})$ donde k es un número real distinto de cero. Para hacer cumplir que la norma de este vector sea 15, podemos plantear la ecuación: $\sqrt{(\frac{2k}{7})^2 + (-\frac{2k}{7})^2 + (\frac{k}{7})^2} = 15$ De allí despejamos los dos posibles valores de k y luego, con este dato, averiguamos las coordenadas posibles para $\vec{v}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra el/los valor/es de $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que el punto $A = (-1; 8)$ sea la proyección ortogonal del punto $B = (-9; 7)$ sobre la recta $L = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : (x; y) = \lambda(\frac{2}{k^2}; -9) + (-5; 40), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

A) $k = \frac{16}{9}$

B) $k = \frac{3}{4}$

C) $k = \pm \frac{4}{3}$

D) $k = \frac{2}{7}$

Opción correcta: C)

Resolución

Como sabemos que A es la proyección del punto B sobre la recta L , lo que se tiene que cumplir es que $B - A$ sea ortogonal a la dirección de la recta. Podemos usar este dato y plantear: $(-8; -1) \cdot (\frac{2}{k^2}, -9) = 0$, de donde podemos despejar, k . También se puede verificar que para estos valores de k el punto A resulta efectivamente un punto de la recta L . Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá el plano Π_1 que contiene a los puntos $A = (1; 9; -4)$, $B = (0; 1; 1)$ y $C = (-2; 1; 3)$. Indicá la opción que muestra una ecuación del plano Π_2 que resulta paralelo a Π_1 y pasa por el punto $(0; 1; 0)$.

A) $-2x - y - 2z = -3$

C) $-2x - y - 2z = -1$

B) $-2x + y - 2z = -1$

D) $2x - y + 2z = 1$

Opción correcta: C)

Resolución

Lo primero que hacemos es hallar dos direcciones del plano, por ejemplo $C - A$ y $B - A$ resultan dos vectores directores del plano Π_1 y también del plano Π_2 . Como en las opciones se ofrecen las ecuaciones implícitas debemos hallar el vector normal, eso lo hacemos realizando el producto vectorial entre las dos direcciones obteniendo $(-16, -8, -16)$. Luego, para hacer cumplir que el plano pedido tiene que pase por el punto $(0; 1; 0)$ la expresión del plano quedaría $-16x - 8y - 16z = -8$ o equivalentemente $-2x - y - 2z = -1$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.
