UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er parcial - 23/04/25 - Tema 1

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
El vector $(2;-3;4)$ es ortogonal al vector $(p;6;q)$ y también es ortogonal al vector $(-2;5;-p)$. Elegí la única opción que muestra los valores de p y q.

A) $p=\frac{19}{4}, q=\frac{55}{3}$
B) $p=-\frac{19}{4}, q=-\frac{25}{3}$
C) $p=-\frac{55}{8}, q=0$
D) $p=-\frac{19}{4}, q=\frac{55}{8}$

Opción correcta: D)
Resolución
Si dos vectores son ortogonales, su producto escalar es cero. Podemos plantear las dos condiciones: $(2;-3;4)\cdot(p;6;q)=0$ y $(2;-3;4)\cdot(-2;5;-p)=0$. De allí se derivan dos ecuaciones de donde se pueden determinar p y q. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
Un vector $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ de norma 15 que resulta paralelo al vector $\left(\frac{2}{7};-\frac{2}{7};\frac{1}{7}\right)$ es:

A) $\vec{v}=(-\frac{\sqrt{10}}{7};\frac{3\sqrt{10}}{7};\frac{10}{7})$
B) $\vec{v}=(-10;10;-5)$
C) $\vec{v}=(-70;70;-35)$
D) $\vec{v}=(\frac{30}{7};-\frac{30}{7};\frac{15}{7})$

Opción correcta: B)
Resolución
Un vector paralelo a $\left(\frac{2}{7};-\frac{2}{7};\frac{1}{7}\right)$ se puede escribir como: $\left(k\cdot\frac{2}{7};-k\cdot\frac{2}{7};k\cdot\frac{1}{7}\right)$ donde k es un número real distinto de cero. Para hacer cumplir que la norma de este vector sea 15, podemos plantear la ecuación: $\sqrt{\left(\frac{2k}{7}\right)^2+\left(-\frac{2k}{7}\right)^2+\left(\frac{k}{7}\right)^2}=15$ De allí despejamos los dos posibles valores de k y luego, con este dato, averiguamos las coordenadas posibles para $\vec{v}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
Indicá la opción que muestra el/los valor/es de $k\in\mathbb{R}$ para que se cumpla que el punto $A=(-1;8)$ sea la proyección ortogonal del punto $B=(-9;7)$ sobre la recta
$L=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:(x;y)=\lambda\left(\frac{2}{k^2};-9\right)+(-5;40),\lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

A) $k=\frac{16}{9}$
B) $k=\frac{3}{4}$
C) $k=\pm\frac{4}{3}$
D) $k=\frac{2}{7}$

Opción correcta: C)
Resolución
Como sabemos que A es la proyección del punto B sobre la recta L, lo que se tiene que cumplir es que $B-A$ sea ortogonal a la dirección de la recta. Podemos usar este dato y plantear: $(-8;-1)\cdot\left(\frac{2}{k^2},-9\right)=0$, de donde podemos despejar, k. También se puede verificar que para estos valores de k el punto A resulta efectivamente un punto de la recta L. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
Considerá el plano Π_1 que contiene a los puntos $A=(1;9;-4)$, $B=(0;1;1)$ y $C=(-2;1;3)$. Indicá la opción que muestra una ecuación del plano Π_2 que resulta paralelo a Π_1 y pasa por el punto $(0;1;0)$.

A) $-2x-y-2z=-3$
B) $-2x+y-2z=-1$
C) $-2x-y-2z=-1$
D) $2x-y+2z=1$

Opción correcta: C)

Resolución
Lo primero que hacemos es hallar dos direcciones del plano, por ejemplo $C-A$ y $B-A$ resultan dos vectores directores del plano Π_1 y también del plano Π_2.

Como en las opciones se ofrecen las ecuaciones implícitas debemos hallar el vector normal, eso lo hacemos realizando el producto vectorial entre las dos direcciones obteniendo $(-16, -8, -16)$. Luego, para hacer cumplir que el plano pedido tiene que pase por el punto $(0; 1; 0)$ la expresión del plano quedaría
$-16x - 8y - 16z = -8$ o equivalentemente $-2x - y - 2z = -1$.
Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá los subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$, $T = \langle(2; 1; -2), (-1; 0; 1), (-3; 4; 3)\rangle$, $R = \langle(1; 1; 2; 1), (2; 3; -1; 1), (4; 5; 3; 3)\rangle$. Elegí la opción que contiene una afirmación verdadera.

A) $\dim(R) = 3$

B) $\langle(1; 1; -1)\rangle$ genera S.

C) $\dim(T) = 2$

D) $(\sqrt{4}; 4; \sqrt{4}) \in S$

Opción correcta: C)
Resolución
Como $(2; 3; -1; 1) - 2(1; 1; 2; 1) = (0; 1; -5; -1)$ y $(4; 5; 3; 3) - 4(1; 1; 2; 1) = (0; 1; -5; -1)$ entonces A) no es verdadera. Como $\dim(S) = 2$ sabemos que $\langle(1; 1; -1)\rangle$ NO genera todo S. Mientras que $(\sqrt{4}; 4; \sqrt{4})$ no cumple la ecuación que define S. Como $2(-1; 0; 1) + (2; 1; -2) = (0; 1; 0)$ y $2(-3; 4; 3) + 3(2; 1; -2) = (0; 11; 0)$ tenemos que $\dim(T) = 2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Decidí cuál de los siguientes vectores es la combinación lineal de $(1; -1; 2)$ y $(1; 1; 2)$.

A) $(-2; 0; 4)$ B) $(-1; 3; 2)$ C) $(-2; 4; 4)$ D) $(2; 4; 4)$

Opción correcta: D)
Resolución
Para obtener la respuesta correcta escribimos la combinación lineal obteniendo:
$-1(1; -1; 2) + 3(1; 1; 2) = (2; 4; 4)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra la ecuación de la parábola de foco $(2; -1{,}5)$ y directriz $y = -0{,}5$.

A) $x^2 - 4x + 6 + 2y = 0$

B) $x^2 + 4x + 6 + 2y = 0$

C) $x^2 - 4x + 4 - 2y = 0$

D) $x^2 + 4x + 4 - 2y = 0$

Opción correcta: A)
Resolución
La distancia entre el foco $(2; -1{,}5)$ y la directriz $y = -0{,}5$ resulta $p = 1$. El vértice de la parábola se encuentra en el punto medio entre ambos y tiene la misma abscisa que el foco: $V = (2; -1)$. Como la directriz resulta paralela al eje x , y el foco se encuentra por debajo de la directriz $-2p = -2$ y la ecuación de la parábola puede escribirse como: $(x - 2)^2 = -2(y + 1)$. Si se desarrolla esta expresión y se la expresa en forma implícita se obtiene: $x^2 - 4x + 6 + 2y = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Elegí la opción que indica las coordenadas del punto de intersección de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $-3x^2 + 4y^2 + 6x + 16y - 23 = 0$.

A) $(-1; 2)$ B) $(1; 2)$ C) $(1; -2)$ D) $(2; 1)$

Opción correcta: C)
Resolución
El punto de intersección de las asíntotas es el centro de la hipérbola. Si se completan cuadrados en la ecuación $-3x^2 + 4y^2 + 6x + 16y - 23 = 0$ se obtiene $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{12} = 1$ se obtienen las coordenadas del punto buscado. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.
