UBAXXI - Álgebra A - Resolución del del 1er parcial - 19/06/25 - Tema 15

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

  Considerá los subespacios $M = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}$, $K = \langle (2; 1; -2), (-1; 0; 1), (-3; 4; 3) \rangle$, $T = \langle (1; 1; 2; 1), (2; 3; -1; 1), (4; 5; 3; 3) \rangle$. Elegí la única opción que es verdadera.

  A) $\dim(M) = 3$

  B) $\langle (1; 1; -1) \rangle$ genera K.

  C) $\dim(T) = 2$

  D) $M \subset T$

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Como la ecuación que define M deja solo dos grados de libertad, tenemos entonces que A) no es verdadera. Como $\dim(K) = 2$ sabemos que $\langle (1; 1; -1) \rangle$ NO genera todo S. Como un conjunto de $\mathbb{R}^3$ no puede ser un conjunto de $\mathbb{R}^4$, D) no es verdadera. Como $(2; 3; -1; 1) - 2(1; 1; 2; 1) = (0; 1; -5; -1)$ y $(4; 5; 3; 3) - 4(1; 1; 2; 1) = (0; 1; -5; -1)$ tenemos que $\dim(T) = 2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

  Considerá los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $T = \langle (-1; 1; 3; 1), (-1; 1; 1; 0), (-1; -1; -4; -1) \rangle$ y $U = \langle (1; 0; -1; 0), (-2; -2; 2; 2), (0; 1; 0; -1) \rangle$. Elegí la única opción que es verdadera.

  A) La dimensión de T es 3 y es igual a la dimensión de U .

  B) La dimensión de T es menor que la dimensión de U.

  C) La dimensión de T es mayor que la dimensión de U.

  D) La dimensión de T es 2 y es igual a la dimensión de U.

  Opción correcta: C)

  Resolución

  En este caso, nos interesa averiguar la dimensión de cada subespacio. Como ambos están dados por generadores, solo resta averiguar una base de cada uno de ellos. Estudiando esto, podemos llegar a la conclusión de que T tiene dimensión 3 mientras que U tiene dimensión 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

  P es una parábola con vértice $V = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$ y foco $F = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$. Elegí la opción que contiene una expresión polinómica de P y la ecuación de su directriz.

  A) $y^2 - 4x + 7y + 6{,}25 = 0$; directriz : $x = -2{,}5$

  B) $y^2 + 2x + 7y + 15{,}25 = 0$; directriz : $x = -1$

  C) $y^2 + 4x + 7y + 18{,}25 = 0$; directriz : $x = -2{,}5$

  D) $y^2 - 2x + 7y + 9{,}25 = 0$; directriz : $x = -2$

  Opción correcta: C)

  Resolución

  A partir de las coordenadas del vértice y el foco, podemos afirmar que la parábola es de la forma $(y - y_v)^2 = -2p(x - x_v)$, y la ecuación de su directriz: $x = x_v + \frac{p}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
 Elegí la opción que indica las coordenadas de los vértices de la elipse de ecuación $25x^2 + 16y^2 - 125x + 144y + 80{,}25 = 0$.

A) $(0{,}5; 2{,}5), (-9{,}5; 2{,}5), (-4{,}5; -1{,}5), (-4{,}5; 6{,}5)$
B) $(2{,}5; 0{,}5), (2{,}5; -9{,}5), (-1{,}5; -4{,}5), (6{,}5; -4{,}5)$
C) $(-0{,}5; -2{,}5), (9{,}5; -2{,}5), (4{,}5; 1{,}5), (4{,}5; -6{,}5)$
D) $(-2{,}5; -0{,}5), (-2{,}5; 9{,}5), (1{,}5; 4{,}5), (-6{,}5; 4{,}5)$

Opción correcta: B)
Resolución
La ecuación de la elipse $25x^2 + 16y^2 - 125x + 144y + 80{,}25 = 0$ puede reescribirse como $\frac{(x-2{,}5)^2}{16} + \frac{(y+4{,}5)^2}{9} = 1$ tiene como centro al punto $(2{,}5; -4{,}5)$. Como $a = 5$, desplazándote 5 unidades hacia arriba y hacia abajo del centro se obtienen, respectivamente, los vértices $(2{,}5; 0{,}5)$ y $(2{,}5; -9{,}5)$. Como $b = 4$, desplazándote 4 unidades hacia la izquierda y hacia la derecha del centro se obtienen, respectivamente, los vértices $(-1{,}5; -4{,}5)$ y $(6{,}5; -4{,}5)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
 Considerá los vectores: $\vec{v_1} = \left(\frac{1}{4}; -1; \frac{3}{2}\right)$, $\vec{v_2} = \left(\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; -2\sqrt{5}\right)$ y $\vec{v_3} = \sqrt{5}\vec{v_2} - \vec{v_1}$. Elegí la única opción que muestra el resultado de $\vec{v_3} \cdot \vec{v_2}$.

A) $\left(-\frac{19\sqrt{5}}{4}; -22\sqrt{5}; -23\sqrt{5}\right)$
B) $\frac{199\sqrt{5}}{4}$
C) $\frac{3\sqrt{113}}{4}$
D) $\frac{199}{4}$

Opción correcta: B)
Resolución
Para encontrar la respuesta, primero hay que calcular las coordenadas de $\vec{v_3}$:
$\vec{v_3} = \sqrt{5}\left(\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; -2\sqrt{5}\right) - \left(\frac{1}{4}; -1; \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{19}{4}; 11; -\frac{23}{2}\right)$. Y luego queda pendiente realizar el producto escalar: $\vec{v_3} \cdot \vec{v_2} = \left(\frac{19}{4}; 11; -\frac{23}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; -2\sqrt{5}\right) = \frac{199\sqrt{5}}{4}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
 $\vec{w} = (w_x; w_y)$ es un vector de norma $\sqrt{34}$ del primer cuadrante, que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el vector $\vec{v} = (-1; 4)$. Elegí la única opción que indica la coordenada w_x.

A) -3
B) 5
C) 3
D) $\frac{1}{17}$

Opción correcta: C)
Resolución
Como $\vec{w}$ tiene norma $\sqrt{34}$ podemos plantear que $\sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{34}$. además, como el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{v} = (-1; 4)$ es $\frac{\pi}{4}$ se puede plantear que: $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. De estas dos ecuaciones se puede deducir que $(4w_y - 17)^2 + w_y^2 = 34$ con lo cual $w_y = 3$ o $w_y = 5$. Si $w_y = 3$ resulta que $w_x = -5$, se descarta esta opción porque $\vec{w}$ es un vector del primer cuadrante. Si $w_y = 5$ resulta $w_x = 3$. Es decir, $\vec{w} = (3; 5)$ y este vector sí es del primer cuadrante. Luego la respuesta es $w_x = 3$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

 Considerá el plano $\Pi_1 : -8y + z = 5$ y Π_2 otro plano del cual se conoce que contiene a eje x y al punto $(0; -3; 3)$. Indicá la única opción que muestra el resultado de $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

A) $\{(0; -3; 3)\}$

B) $\{(x; y; z) = \lambda(1; -8; 8) + (0; -5; 5), \lambda \in \mathbb{R}\}$

C) $\{(x; y; z) = \lambda(0; -3; 3) + (\frac{5}{27}; 0; 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$

D) $\{\lambda(1; 0; 0) + (0; -\frac{5}{9}; \frac{5}{9}), \lambda \in \mathbb{R}\}$

Opción correcta:D)

Resolución

Construimos el plano Π_2: una de sus direcciones es el vector $(1; 0; 0)$ ya que el plano contiene al eje x; además, otra dirección se consigue restando dos puntos uno de ellos puede ser el $(0; 0; 0)$ y el otro $(0; -3; 3)$, por eso el vector $(0; 3; -3)$ es una dirección del plano. Nos queda que ecuación vectorial del plano es $(x; y; z) = \alpha(0; -3; 3) + \beta(1; 0; 0) = (\beta; -3\alpha; 3\alpha)$. Al reemplazar en la ecuación del primer plano, despejamos $-8.(-3\alpha) + 3\alpha = 5$ y obtenemos que $\alpha = \frac{5}{27}$. Concluimos entonces, al reemplazar este dato en la ecuación del segundo plano, que la intersección buscada es una recta de ecuación: $\lambda(1; 0; 0) + (0; -\frac{5}{9}; \frac{5}{9})$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

 Indicá la opción que muestra el punto simétrico a $P = (0; 0; 2)$ respecto del plano de ecuación vectorial $\Pi = \left\{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : \alpha\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{4}\right) + \beta\left(0; 1; -\frac{1}{2}\right) + (1; 5; 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$

A) $\left(\frac{3}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{12}{7}\right)$ B) $\left(\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{10}{7}\right)$ C) $\left(\frac{3}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{12}{7}\right)$ D) $\left(\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{22}{7}\right)$

Opción correcta: B)

Resolución

Lo primero que podemos hacer es conseguir la forma implícita del plano dado, esto es $-3x + y + 2z = 2$. Luego, pensemos en la recta con dirección $(-3; 1; 2)$ y que pasa por el punto P. Al hallar la intersección de esta recta con el plano, obtenemos el punto Q. El punto simétrico P' pedido se puede despejar como $\frac{P+P'}{2} = Q$ Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.
