

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considera los vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que se verifican las siguientes condiciones: $\vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{1}{6}$, la norma de $\vec{v}$ es $\frac{5}{3}$ y $\vec{w} = (-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{9}{10})$. Elegí la única opción que muestra el valor de $\cos(\alpha)$ si α es el ángulo determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

A) $-\frac{1}{11}$

B) 11

C) -11

D) $\frac{1}{11}$

Opción correcta: A)

Resolución

La fórmula para hallar el ángulo entre dos vectores: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$. Si se reemplazan los datos del problema en esta igualdad, resulta: $\cos(\alpha) = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{5}{3} \cdot \frac{11}{10}}$ de donde se deduce la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Al vector $\vec{u} = (\frac{3}{7}; -\frac{1}{7}; -\frac{2}{7})$ se le aplica una dilatación $\beta \in \mathbb{R}$ y, luego, una traslación de dirección $(-6; 3; 4)$ y se obtiene el vector $(-3; 2; 2)$. Elegí la única opción que muestra el valor de β .

A) -7

B) $-\frac{1}{7}$

C) $\frac{1}{7}$

D) 7

Opción correcta: D)

Resolución

La ecuación vectorial $\beta (\frac{3}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{2}{7}) + (-6; 3; 4) = (-3; 2; 2)$ permite encontrar el vector de β . Si se expresa el primer término como un solo vector, aplicando las operaciones correspondientes, y se iguala coordenada a coordenada, se podrá obtener el valor de β . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra al plano que contiene a las rectas:

$$L_1 = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : \beta(-3; 1; 4) + (0; 0; 1), \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y = 0; -y + z = 1\}$$

A) $-3x + 19y - 7z = -7$

C) $-3x - 19y - 7z = -7$

B) $3x - 19y + 7z = -10$

D) $-3x + y + 4z = 1$

Opción correcta: A)

Resolución

Un plano que contiene a las dos rectas tiene un vector normal que resulta ortogonal a ambas, para hallarlo podemos hacer el producto vectorial entre las direcciones de las rectas. La dirección de L_1 es $(-3; 1; 4)$; y para hallar la dirección de L_2 podemos primero llevarla a su forma vectorial, la que nos queda $(4; 1; 1)\alpha + (0; 0; 1)$, por lo que su dirección es $(4; 1; 1)$. Entonces, la normal del plano es $(-3; 1; 4) \times (4; 1; 1) = (-3; 19; -7)$. Además, el punto de intersección entre las rectas se puede ver que es $(0; 0; 1)$. Con estos datos podemos construir el plano y nos queda $-3x + 19y - 7z = -7$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Indicá la única opción que muestra los puntos de la recta

$$L = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : (x; y; z) = \lambda(\frac{1}{4}; 1; -1) + (2; 0; 3), \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ que están a distancia } \sqrt{35} \text{ del punto } A = (2; 1; 4).$$

A) $(1; 4; -4)$ y $(-1; -4; 4)$

C) $(37; 1; 4)$ y $(2; 1; 39)$

B) $(1; -1; -5)$ y $(-1; -5; 3)$

D) $(3; 4; -1)$ y $(1; -4; 7)$

Opción correcta: D)

Resolución

Por un lado, las coordenadas del punto buscado tiene que escribirse como $(\frac{1}{4}\lambda + 2; \lambda; -\lambda + 3)$.

Siguiendo, como queremos que está a distancia $\sqrt{35}$ de A , planteamos la ecuación:

$\|(\frac{1}{4}\lambda + 2; \lambda; -\lambda + 3) - (2; 1; 4)\| = \sqrt{35}$ desde allí se pueden hallar los valores de λ que son ± 4 , y para estos valores se obtienen los puntos buscados. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

El conjunto $S = \{(1; -3; 2), (-2; -6; -4), (-1; 1; -2)\}$ es linealmente dependiente. Elegí la terna de valores que corresponde a los coeficientes de la combinación lineal entre los vectores de S igual al vector nulo.

A) $\lambda = 4, \mu = \frac{1}{2}, \nu = 3$

C) $\lambda = -4, \mu = \frac{1}{2}, \nu = -3$

B) $\lambda = -2, \mu = \frac{1}{2}, \nu = -3$

D) $\lambda = 4, \mu = -\frac{1}{2}, \nu = -3$

Opción correcta: B)

Resolución

A partir de plantear la combinación lineal $\lambda \cdot (1; -3; 2) + \mu \cdot (-2; -6; -4) + \nu \cdot (-1; 1; -2) = (0; 0; 0)$ obtenemos el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu - \nu = 0 \\ -3\lambda - 6\mu + \nu = 0 \\ 2\lambda - 4\mu - 2\nu = 0 \end{cases}$$

el cual tiene como solución no trivial que $\lambda = -4\mu$ y $\nu = -6\mu$, con μ pudiendo tomar cualquier valor con lo cual dándoles valores a este último tenemos que la única terna que es solución del sistema es $\nu = -3, \lambda = -2, \mu = \frac{1}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 - x_5 = 0 \wedge x_3 = 0\}$. Elegí la terna de valores que hace que el vector $(\alpha; \beta; 0; \gamma; \gamma)$ pertenezca a S .

A) $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 4$

C) $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = -4$

B) $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 4$

D) $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = 4$

Opción correcta: A)

Resolución

De las ecuaciones que definen S , podemos notar que basta con que $\alpha + \beta = \gamma$ para que el vector pertenezca a S . La única terna que cumple esta condición es la A). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Indica la opción que corresponde a la ecuación de una circunferencia que tiene el mismo centro que $x^2 + y^2 + 4x - 7y - 32,75 = 0$ y cuyo radio es la mitad del de ésta.

A) $x^2 + y^2 - 4x + 7y = 8,25$

B) $x^2 + y^2 + 4x - 7y - 8,25 = 0$

C) $x^2 + y^2 - 4x + 7y + 4 = 0$

D) $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 4 = 0$

Opción correcta: D)

Resolución

Al completar cuadrados en la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 7y - 32,75 = 0$ se obtiene $(x + 2)^2 + (y - 3,5)^2 = 49$. La ecuación de la circunferencia pedida es ofrecida en la opción B) ya que tiene el mismo centro $(-2; 3,5)$ y radio $r = \frac{7}{2} = 3,5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra las coordenadas de los focos de la cónica de ecuación $-7x^2 + 4y^2 - 28x - 8y - 52 = 0$.

A) $(-2; 1 + \sqrt{3}), (-2; 1 - \sqrt{3})$

B) $(1 + \sqrt{3}; -2), (1 - \sqrt{3}; -2)$

C) $(1 + \sqrt{11}; -2), (1 - \sqrt{11}; -2)$

D) $(-2; 1 + \sqrt{11}), (-2; 1 - \sqrt{11})$

Opción correcta: D)

Resolución

Con el procedimiento de completar cuadrados podemos escribir la ecuación de la hipérbola $-7x^2 + 4y^2 - 28x - 8y - 52 = 0$ como $\frac{(y-1)^2}{7} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$. Resulta ser una hipérbola de eje focal vertical en $x = -2$. Con la relación pitagórica entre los parámetros se puede obtener $c = \sqrt{11}$. Luego, la abscisa de los focos es -2 y la ordenada se obtiene de sumar restar el valor de c a la ordenada del centro $(-2; 1)$ de la hipérbola. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.
