

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considera en $\mathbb{R}^3$ el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (3, 5)$ y $\vec{c} = (4, 2)$ y la traslación $\vec{t} = (-5, 7)$ que se aplica a dichos vectores. Elegí la única opción que muestra el perímetro del triángulo obtenido.

- A) $\sqrt{2} + \sqrt{34} + \sqrt{20}$ B) $\sqrt{56}$ C) $\sqrt{40}$ D) $2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$

Opción correcta: D)

Resolución

El perímetro del triángulo no se modifica al aplicar la traslación, por lo que sólo debemos calcular la suma de las distancias entre los vectores dados:

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20}$$

$$d(\vec{b}, \vec{c}) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$$

$$d(\vec{c}, \vec{a}) = \sqrt{(1-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{20} + \sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$$

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considera un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de norma 3 ortogonal a los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y $\vec{w} = (4, 2, 0)$. Elegí la única opción que muestra las coordenadas de un vector que cumpla con lo pedido.

- A) $(1, 2, 2)$ B) $(1, 2, -2)$ C) $(-1, 2, 2)$ D) $(-1, -2, 2)$

Opción correcta: C)

Resolución

Sea $\vec{v} = (x, y, z)$ debe cumplirse $(x, y, z) \cdot (2, 0, 1) = 0$, $(x, y, z) \cdot (4, 2, 0) = 0$. De la primera ecuación surge que debe ser $z = -2x$ y de la segunda que $y = -2x$. Por otro lado para que sea $\| (x, y, z) \| = 3$ planteamos $\sqrt{x^2 + (-2x)^2 + (-2x)^2} = 3$ de donde $x^2 = 1$. Los vectores que cumplen con lo solicitado son $(1, -2, -2)$ y $(-1, 2, 2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

La proyección del punto $(1, 1, 3)$ sobre el plano de ecuación $\pi : x + y - 2z = 2$ es el punto:

- A) $(-1, -1, -3)$ B) $(1, 1, -2)$ C) $(3, 3, -1)$ D) $(2, 2, 1)$

Opción correcta: D)

Resolución

Para hallar la proyección de $(1, 1, 3)$ debemos hallar la intersección entre el plano y la recta cuya dirección es la misma que la normal, es decir perpendicular al plano, y que pasa por $(1, 1, 3)$. Dicha recta tiene ecuación $(x; y; z) = \alpha \cdot (1, 1, -2) + (1, 1, 3)$. La intersección con el plano da el punto $(2, 2, 1)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considera las siguientes rectas: $L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0, y = 0\}$
 $L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = r(-6, 0, -2) + (1, 1, -3), r \in \mathbb{R}\}$

Elegí la opción que contiene una afirmación verdadera.

- A) L_1 es paralela a L_2 .
B) L_2 es perpendicular a L_1 .
C) L_1 y L_2 son alabeadas.
D) L_1 y L_2 son coincidentes.

Opción correcta: C)

Resolución

Los vectores directores de estas rectas son respectivamente $v_1 = (-2, 0, 1)$ y $v_2 = (-6, 0, -2)$, de acá vemos que v_1 y v_2 no son múltiplos por lo tanto no son paralelas, y desde luego tampoco coincidentes. Mientras que $v_1 \cdot v_2 \neq 0$ y por lo tanto no son perpendiculares. Por lo cual obtenemos la respuesta correcta que es que son alabeadas. Estos contenidos los encontrás en la sesión 2.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá los subespacios $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (-1, 1, -2); (14, -1, -6) \rangle$. Indicá la opción que muestra las coordenadas de un vector que pertenezca a S y también pertenezca a T .

A) $(1, 1, 2)$

B) $(14, -1, -6)$

C) $(-15, 2, 4)$

D) $(25, 0, 0)$

Opción correcta: C)

Resolución

Los vectores que pertenecen a T se pueden escribir como $a \cdot (-1, 1, -2) + b \cdot (14, -1, -6)$, es decir de la forma $(-a + 14b, a - b, -2a - 6b)$. Como además se tiene que cumplir que sean vectores de S , reemplazando en la ecuación de este obtenemos que $2(a - b) - (-2a - 6b) = 0$, lo que implica que $a = -b$ y en consecuencia, los vectores buscados son de la forma $(15b, -2b, -4b)$. De entre las opciones notemos que solo la tercera opción cumple esta condición. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá los subespacios $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -x_2 = 0\}$ y $T = \langle (2, 0, 1); (1, -1, -2); (6, -6, -12); (-1, -1, -3) \rangle$.

Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única verdadera.

A) S y T tienen la misma dimensión y es 3.

B) La dimensión de T es mayor que la dimensión de S .

C) La dimensión de S es 3 y la dimensión de T es 2.

D) S y T tienen la misma dimensión y es 2.

Opción correcta: D)

Resolución

Una base para S es $\{(1, 0, 0); (0, 0, 1)\}$, luego la dimensión de S es 2. Por otro lado, una base para T es $\{(2, 0, 1); (1, -1, -2)\}$ por lo que la dimensión de T también es 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

H es una hipérbola de ecuación $-3x^2 + 4y^2 = 23 - 30x - 32y$. Elegí la opción que muestra las coordenadas del punto de intersección de las asíntotas de H .

A) $(-5, -4)$

B) $(-5, 4)$

C) $(5, -4)$

D) $(5, 4)$

Opción correcta: C)

Resolución

El punto de intersección de las asíntotas de H es el centro de dicha hipérbola. Si se escribe la ecuación canónica de H se obtiene la expresión $\frac{(y+4)^2}{3} - \frac{(x-5)^2}{4} = 1$. Esta expresión permite determinar que el punto de coordenadas $(5, -4)$ es su centro y la intersección de las asíntotas. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las ecuaciones de las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 = 3x - 5y - 4,5$ y $C_2 : x^2 + y^2 + 0,5 = 3y + 3x$. Elegí la única opción que muestra una afirmación verdadera.

- A) Las circunferencias tienen distinto radio.
- B) Las circunferencias se intersecan en un solo punto.
- C) Las circunferencias tienen el mismo centro.
- D) Las circunferencias se intersecan exactamente en dos puntos.

Opción correcta: B)

Resolución

Si se completa cuadrados en las ecuaciones de cada una de las circunferencias se obtienen las expresiones: $C_1 : (x - 1,5)^2 + (y + 2,5)^2 = 4$ y $C_2 : (x - 1,5)^2 + (y - 1,5)^2 = 4$. De esta forma se puede comprobar que ambas tienen el mismo radio y que no comparten el centro. Debido a que el radio $r = 2$ es el mismo para ambas circunferencias y que la distancia entre los centros de C_1 y de C_2 es 4, las circunferencias tienen un solo punto de intersección. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.
