UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 17/04/2024 - Tema 8

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Indicá la opción que muestra un valor de $b \in \mathbb{R}$ para el cual, el conjunto $\{(b^2 - 10, 2, -2); (-6, -2, 2); (6, -2b^2, 0)\}$ resulte linealmente independiente.

  A) 3 B) -4 C) 0 D) 4

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Si $b = 0$ el conjunto a analizar es $\{(-10, 2, -2); (-6, -2, 2); (6, 0, 0)\}$ de donde se puede deducir que la suma de los dos primeros vectores es múltiplo del último; luego el conjunto es linealmente dependiente. Si $b = \pm 4$ el conjunto a analizar es $\{(6, 2, -2); (-6, -2, 2); (6, -32, 0)\}$ de donde obtenemos que los dos primeros vectores son múltiplos, por lo que el conjunto es linealmente dependiente.Para el caso $b = 3$ obtenemos el conjunto $\{(-1, 2, -2); (-6, -2, 2); (6, -18, 0)\}$ que es linealmente independiente. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  $S \in \mathbb{R}^3$ tiene dimensión 2 y cumple que $\vec{v} = (-9, 0, 8)$ pertenece a S. Indicá cuál de las siguientes opciones muestra las posibles ecuaciones o generadores de S.

  A) $\{X \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0; -9x_2 + 8x_3 = 0\}$
  B) $S = \langle (1, 1, 10); (0, 1, 1); (0, 4, 4) \rangle$
  C) $\{X \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 + x_2 + 9x_3 = 0\}$
  D) $S = \langle (-9, 1, 8); (0, 1, 0), (-9, 0, 9) \rangle$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  La primera de las opciones la podemos descartar porque no corresponde a un subespacio de $\mathbb{R}^3$. La segunda opción también puede ser descartada puesto que no se cumple que $\vec{v} \in S$. La tercera de las opciones es la correcta, puesto que se puede comprobar que las coordenadas de $\vec{v}$ cumplen con las ecuaciones de este subespacio y además, este tiene dimensión 2. La cuarta de las opciones no podría ser cierta puesto que la dimensión es 3. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra la ecuación de la parábola de directriz $y = -0,5$ y foco $(4; -1, 5)$.

  A) $-y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$
  B) $2(y + 1) = (x - 4)^2$
  C) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$
  D) $2(x - 4) = (y + 1)^2$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  El vértice de la parábola es el punto medio del segmento perpendicular a la directriz que pasa por el foco y se encuentra a igual distancia del foco que de la directriz. Y la distancia entre la directriz y el foco es $|p| = 1$. Luego $\frac{|p|}{2} = \frac{1}{2}$ y las coordenadas del vértice son $(4, -1)$. Como la directriz es horizontal y el foco se encuentra "abajo" de la directriz, el signo de p es negativo y la ecuación de la parábola es $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ siendo $(x_0, y_0) = (4, -1)$ y $2p = -2 \cdot 1 = -2$, es decir: $(x - 4)^2 = -2(y + 1)$. Desarrollando esta igualdad se obtiene la ecuación buscada. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  C es una circunferencia de radio $\sqrt{3}$ y centro $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{5}\right)$. Elegí la opción que enuncia una afirmación verdadera.

  A) El punto $P = \left(-\sqrt{2} - \frac{5}{3}, -\frac{3}{5}\right)$ pertenece a C.
  B) C tiene el mismo centro que la circunferencia D de ecuación $x^2 - \frac{10}{3}x + y^2 + \frac{4}{5}y - \frac{239}{225} = 0$
  C) La ecuación canónica de C es $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = 9$.
  D) El origen de coordenadas es un punto que pertenece a C.

  Opción correcta: A)
  Resolución
  El origen de coordenadas no verifica la ecuación de la circunferencia. Además, la ecuación canónica ofrecida entre las opciones no coincide con C porque el radio es 3. Tampoco es cierto que D tenga el mismo centro que C: las coordenadas de los centros de ambas circunferencias tienen signos opuestos. La única afirmación correcta es que el punto P pertenece a C dado que verifica su ecuación. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  El producto escalar entre el vector unitario $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{u} = (-5, 4, 2)$ es -3. Indicá cuál es la única opción que muestra el valor exacto del coseno del ángulo $\hat{\alpha}$ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

  A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $-0,447$ D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Teniendo en cuenta que $\cos(\hat{\alpha}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$, si se reemplaza con los datos resulta $\cos(\hat{\alpha}) = \frac{-3}{1 \cdot ||(-5,4,2)||} = \frac{-3}{\sqrt{45}}$, que es equivalente a $cos(\hat{\alpha}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  El vector $(k, 3k-1, -k)$ es ortogonal al vector $\left(\frac{1}{4}, 1, 3,\right)$. Elegí la única opción que muestra las coordenadas del punto medio P de los extremos de dichos vectores.

  A) $P = \left(\frac{15}{8}, 5, -\frac{7}{2}\right)$
  B) $P = \left(-\frac{15}{8}, -6, \frac{7}{2}\right)$
  C) $P = \left(-3, -\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right)$
  D) $P = \left(\frac{17}{8}, 6, -\frac{1}{2}\right)$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Si los vectores son ortogonales, debe cumplirse $(k, 3k-1, -k) \cdot \left(\frac{1}{4}, 1, 3,\right) = 0$. Desarrollando el producto escalar resulta $\frac{1}{4}k + 3k - 1 - 3k = 0$ y el resultado de esta ecuación es $k = 4$. Del promedio de las coordenadas de los vectores se obtienen las coordenadas del punto medio solicitado: $x_P = \frac{4+\frac{1}{4}}{2} = \frac{17}{8}$, $y_P = \frac{11+1}{2} = 6$ y $z_P = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra la distancia entre el punto $(0;2;0)$ y la recta de ecuación $(x;y;z) = \alpha \cdot (-2;-2;-2) + \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R}$.

  A) $\sqrt{11}$ B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) 6

  Opción correcta: C)
  Resolución
  Para hallar la distancia entre el punto $(0;2;0)$ y la recta primero debemos hallar la proyección de $(0;2;0)$ sobre la recta. Esto lo hacemos hallando la intersección entre la recta y el plano cuya normal es el vector director de la recta, es decir perpendicular a la recta, y que pasa por $(0;2;0)$. A partir de esto, calculamos la distancia: $\sqrt{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

  Considerá los siguientes planos:

  $\Pi_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1,1,-1) + s(1,-1,-2) + (1,0,-2),\ t,\ s \in \mathbb{R}\}$

  $\Pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -3x + y - 2z = 1\}$

  Elegí la única opción que contiene una afirmación verdadera.

  A) Π_1 es paralelo a Π_2.

  B) Los planos se intersectan en una recta pero no formando un ángulo recto.

  C) Π_2 es perpendicular a Π_1.

  D) Π_1 y Π_2 son coincidentes.

  Opción correcta: D)

  Resolución

  Los planos tienen la misma normal, a saber $v = (-3,1,-2)$. Dado que el punto $(1,0,-2)$ perteneciente a Π_1 se encuentra en Π_2, entonces las dos ecuaciones describen el mismo plano. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.