

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

El producto escalar entre el vector unitario  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $\vec{u} = (-5, 4, 2)$  es  $-3$ . Indicá cuál es la única opción que muestra el valor exacto del coseno del ángulo  $\hat{\alpha}$  que forman  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

- A)  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$                       B)  $\frac{1}{15}$                       C)  $-0,447$                       D)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Opción correcta: A)

Resolución

Teniendo en cuenta que  $\cos(\hat{\alpha}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}$ , si se reemplaza con los datos resulta  $\cos(\hat{\alpha}) = \frac{-3}{1 \cdot \|(-5, 4, 2)\|} = \frac{-3}{\sqrt{45}}$ , que es equivalente a  $\cos(\hat{\alpha}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

---

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

El vector  $(k, 3k - 1, -k)$  es ortogonal al vector  $(\frac{1}{4}, 1, 3)$ . Elegí la única opción que muestra las coordenadas del punto medio  $P$  de los extremos de dichos vectores.

- A)  $P = (\frac{15}{8}, 5, -\frac{7}{2})$                       C)  $P = (-3, -\frac{5}{2}, \frac{5}{3})$   
 B)  $P = (-\frac{15}{8}, -6, \frac{7}{2})$                       D)  $P = (\frac{17}{8}, 6, -\frac{1}{2})$

Opción correcta: D)

Resolución

Si los vectores son ortogonales, debe cumplirse  $(k, 3k - 1, -k) \cdot (\frac{1}{4}, 1, 3) = 0$ . Desarrollando el producto escalar resulta  $\frac{1}{4}k + 3k - 1 - 3k = 0$  y el resultado de esta ecuación es  $k = 4$ . Del promedio de las coordenadas de los vectores se obtienen las coordenadas del punto medio solicitado:  $x_P = \frac{4+\frac{1}{4}}{2} = \frac{17}{8}$ ,  $y_P = \frac{11+1}{2} = 6$  y  $z_P = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

---

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra la distancia entre el punto  $(0; 2; 0)$  y la recta de ecuación  $(x; y; z) = \alpha \cdot (-2; -2; -2) + (\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- A)  $\sqrt{11}$                       B) 2                      C)  $\sqrt{2}$                       D) 6

Opción correcta: C)

Resolución

Para hallar la distancia entre el punto  $(0; 2; 0)$  y la recta primero debemos hallar la proyección de  $(0; 2; 0)$  sobre la recta. Esto lo hacemos hallando la intersección entre la recta y el plano cuya normal es el vector director de la recta, es decir perpendicular a la recta, y que pasa por  $(0; 2; 0)$ . A partir de esto, calculamos la distancia:  $\sqrt{2}$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

---

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá los siguientes planos:

$$\Pi_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, 1, -1) + s(1, -1, -2) + (1, 0, -2), t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + y - 2z = 1\}$$

Elegí la única opción que contiene una afirmación verdadera.

- A)  $\Pi_1$  es paralelo a  $\Pi_2$ .  
 B) Los planos se intersectan en una recta pero no formando un ángulo recto.  
 C)  $\Pi_2$  es perpendicular a  $\Pi_1$ .  
 D)  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  son coincidentes.

Opción correcta: D)

Resolución

Los planos tienen la misma normal, a saber  $v = (-3, 1, -2)$ . Dado que el punto  $(1, 0, -2)$  perteneciente a  $\Pi_1$  se encuentra en  $\Pi_2$ , entonces las dos ecuaciones describen el mismo plano. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

---

---

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra un valor de  $b \in \mathbb{R}$  para el cual, el conjunto  $\{(b^2 - 10, 2, -2); (-6, -2, 2); (6, -2b^2, 0)\}$  resulte linealmente independiente.

A) 3

B) -4

C) 0

D) 4

Opción correcta: A)

Resolución

Si  $b = 0$  el conjunto a analizar es  $\{(-10, 2, -2); (-6, -2, 2); (6, 0, 0)\}$  de donde se puede deducir que la suma de los dos primeros vectores es múltiplo del último; luego el conjunto es linealmente dependiente. Si  $b = \pm 4$  el conjunto a analizar es  $\{(6, 2, -2); (-6, -2, 2); (6, -32, 0)\}$  de donde obtenemos que los dos primeros vectores son múltiplos, por lo que el conjunto es linealmente dependiente. Para el caso  $b = 3$  obtenemos el conjunto  $\{(-1, 2, -2); (-6, -2, 2); (6, -18, 0)\}$  que es linealmente independiente. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

---

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

$S \in \mathbb{R}^3$  tiene dimensión 2 y cumple que  $\vec{v} = (-9, 0, 8)$  pertenece a  $S$ . Indicá cuál de las siguientes opciones muestra las posibles ecuaciones o generadores de  $S$ .

A)  $\{X \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0; -9x_2 + 8x_3 = 0\}$

B)  $S = \langle (1, 1, 10); (0, 1, 1); (0, 4, 4) \rangle$

C)  $\{X \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 + x_2 + 9x_3 = 0\}$

D)  $S = \langle (-9, 1, 8); (0, 1, 0), (-9, 0, 9) \rangle$

Opción correcta: C)

Resolución

La primera de las opciones la podemos descartar porque no corresponde a un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ . La segunda opción también puede ser descartada puesto que no se cumple que  $\vec{v} \in S$ . La tercera de las opciones es la correcta, puesto que se puede comprobar que las coordenadas de  $\vec{v}$  cumplen con las ecuaciones de este subespacio y además, este tiene dimensión 2. La cuarta de las opciones no podría ser cierta puesto que la dimensión es 3. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

---

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra la ecuación de la parábola de directriz  $y = -0,5$  y foco  $(4; -1, 5)$ .

A)  $-y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$

B)  $2(y + 1) = (x - 4)^2$

C)  $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$

D)  $2(x - 4) = (y + 1)^2$

Opción correcta: C)

Resolución

El vértice de la parábola es el punto medio del segmento perpendicular a la directriz que pasa por el foco y se encuentra a igual distancia del foco que de la directriz. Y la distancia entre la directriz y el foco es  $|p| = 1$ . Luego  $\frac{|p|}{2} = \frac{1}{2}$  y las coordenadas del vértice son  $(4, -1)$ . Como la directriz es horizontal y el foco se encuentra "abajo" de la directriz, el signo de  $p$  es negativo y la ecuación de la parábola es  $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$  siendo  $(x_0, y_0) = (4, -1)$  y  $2p = -2 \cdot 1 = -2$ , es decir:  $(x - 4)^2 = -2(y + 1)$ . Desarrollando esta igualdad se obtiene la ecuación buscada. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

---

---

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

$C$  es una circunferencia de radio  $\sqrt{3}$  y centro  $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{5})$ . Elegí la opción que enuncia una afirmación verdadera.

A) El punto  $P = (-\sqrt{2} - \frac{5}{3}, -\frac{3}{5})$  pertenece a  $C$ .

B)  $C$  tiene el mismo centro que la circunferencia  $D$  de ecuación  $x^2 - \frac{10}{3}x + y^2 + \frac{4}{5}y - \frac{239}{225} = 0$

C) La ecuación canónica de  $C$  es  $(x + \frac{5}{3})^2 + (y - \frac{2}{5})^2 = 9$ .

D) El origen de coordenadas es un punto que pertenece a  $C$ .

Opción correcta: A)

Resolución

El origen de coordenadas no verifica la ecuación de la circunferencia. Además, la ecuación canónica ofrecida entre las opciones no coincide con  $C$  porque el radio es 3. Tampoco es cierto que  $D$  tenga el mismo centro que  $C$ : las coordenadas de los centros de ambas circunferencias tienen signos opuestos. La única afirmación correcta es que el punto  $P$  pertenece a  $C$  dado que verifica su ecuación. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

---