UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 17/04/2024 - Tema 5

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
 El producto escalar entre el vector unitario $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{u} = (2, -1, 7)$ es 3. Indicá cuál es la única opción que muestra el valor exacto del coseno del ángulo $\hat{\alpha}$ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

 A) $0,408$ B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

 Opción correcta:
 Resolución
 Teniendo en cuenta que $\cos(\hat{\alpha}) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$, si se reemplaza con los datos resulta
 $\cos(\hat{\alpha}) = \dfrac{3}{1 \cdot ||(2, -1, 7)||} = \dfrac{3}{\sqrt{54}}$, que es equivalente a $\cos(\hat{\alpha}) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.
 Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
 El vector $(2k + 1, -k, k)$ es ortogonal al vector $\left(-1, -2, \frac{1}{3}\right)$. Elegí la única opción que muestra las coordenadas del punto medio P de los extremos de dichos vectores.

 A) $P = \left(4, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$ C) $P = \left(3, -\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right)$

 B) $P = \left(-3, \frac{1}{2}, -\frac{8}{3}\right)$ D) $P = \left(\frac{17}{8}, 6, -\frac{1}{2}\right)$

 Opción correcta:C)
 Resolución
 Si los vectores son ortogonales, debe cumplirse $(2k + 1, -k, k) \cdot \left(-1, -2, \frac{1}{3}\right) = 0$. Desarrollando el producto escalar resulta $-2k - 1 + 2k + \frac{1}{3}k = 0$ y el resultado de esta ecuación es $k = 3$. Del promedio de las coordenadas de los vectores se obtienen las coordenadas del punto medio solicitado: $x_P = \frac{7+(-1)}{2} = 3$, $y_P = \frac{-3+(-2)}{2} = -\frac{5}{2}$ y $z_P = \frac{3+\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
 Elegí la opción que muestra la distancia entre el punto $(2; 0; 0)$ y la recta de ecuación
 $(x; y; z) = \alpha \cdot (-2; -2; -2) + \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R}$.

 A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{11}$ D) 6

 Opción correcta: A)
 Resolución
 Para hallar la distancia entre el punto $(2; 0; 0)$ y la recta primero debemos hallar la proyección de $(2; 0; 0)$ sobre la recta. Esto lo hacemos hallando la intersección entre la recta y el plano cuya normal es el vector director de la recta, es decir perpendicular a la recta, y que pasa por $(2; 0; 0)$. A partir de esto, calculamos la distancia: $\sqrt{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
 Considerá los siguientes planos:
 $\Pi_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, 1, 2) + s(1, -1, -3) + (4, 0, -2),\ t,\ s \in \mathbb{R}\}$
 $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + z = -2\}$
 Elegí la única opción que contiene una afirmación verdadera.

 A) Π_1 es paralelo a Π_2.
 B) Los planos se intersectan en una recta pero no formando un ángulo recto.
 C) Π_2 es perpendicular a Π_1.
 D) Π_1 y Π_2 son coincidentes.

Opción correcta: B)
Resolución
Las normales a estos planos son respectivamente $v_1 = (-1, 5, -2)$ y $v_2 = (3, 0, 1)$. Estas normales no son múltiplos entre sí con lo cual los planos no son ni paralelos ni están contenidos el uno en el otro. Mientras que $v_1 \cdot v_2 \neq 0$ y por lo tanto no son perpendiculares. Por lo tanto los planos se intersectan en una recta pero no formando un ángulo recto. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Indicá la opción que muestra un valor de $b \in \mathbb{R}$ para el cual, el conjunto $\{(-5, -2, 2); (b^2 - 4, 2, -2); (5, -2b^2, 0)\}$ resulte linealmente independiente.

  A) 0 B) 3 C) -3 D) 4

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Si $b = 0$ el conjunto a analizar es $\{(-5, -2, 2); (-4, 2, -2); (5, 0, 0)\}$ de donde se puede deducir que la suma de los dos primeros vectores es múltiplo del último; luego el conjunto es linealmente dependiente. Si $b = \pm 3$ el conjunto a analizar es $\{(-5, -2, 2); (5, 2, -2); (5, -18, 0)\}$ de donde obtenemos que los dos primeros vectores son múltiplos, por lo que el conjunto es linealmente dependiente.Para el caso $b = 4$ obtenemos el conjunto $\{(-5, -2, 2); (12, 2, -2); (5, -32, 0)\}$ que es linealmente independiente. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  $S \in \mathbb{R}^3$ tiene dimensión 2 y cumple que $\vec{v} = (1, -9, 0)$ pertenece a S. Indicá cuál de las siguientes opciones muestra las posibles ecuaciones o generadores de S.

  A) $\{X \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0; x_2 + x_3 = 0\}$
  B) $S = \langle (1, 1, 10); (0, 1, 1); (0, 4, 4) \rangle$
  C) $\{X \in \mathbb{R}^3 : 9x_1 + x_2 = 0; x_3 = 0\}$
  D) $S = \langle (1, -9, 1); (0, 1, 0) \rangle$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  La primera de las opciones la podemos descartar porque no corresponde a un subespacio de $\mathbb{R}^3$. La tercera opción también puede ser descartada puesto que se puede deducir que corresponde a un subespacio de dimensión 1. La cuarta no cumple que $\vec{v} \in S$. La segunda de las opciones es la correcta, puesto que se puede comprobar que las coordenadas de $\vec{v}$ son combinación lineal de los generadores que muestra esta opción y además este subespacio tiene dimensión 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra la ecuación de la parábola de directriz $y = 4,5$ y foco $(-1; 3,5)$.

  A) $2(x + 1) = (y - 4)^2$
  B) $x^2 + 2x + 2y - 7 = 0$
  C) $-y^2 - 2x + 8y - 18 = 0$
  D) $2(y - 4) = (x + 1)^2$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  El vértice de la parábola es el punto medio del segmento perpendicular a la directriz que pasa por el foco y se encuentra a igual distancia del foco que de la directriz. Y la distancia entre la directriz y el foco es $|p| = 1$. Luego $\frac{|p|}{2} = \frac{1}{2}$ y las coordenadas del vértice son $(-1, 4)$. Como la directriz es horizontal y el foco se encuentra "abajo" de la directriz, el signo de p es negativo y la ecuación de la parábola es $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ siendo $(x_0, y_0) = (-1, 4)$ y $2p = -2 \cdot 1 = -2$, es decir: $(x+1)^2 = -2(y-4)$. Desarrollando esta igualdad se obtiene la ecuación buscada. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
 C es una circunferencia de radio $\sqrt{3}$ y centro $\left(\frac{2}{5}, -\frac{5}{3}\right)$. Elegí la opción que enuncia una afirmación verdadera.

  A) El origen de coordenadas es un punto que pertenece a C.
  B) La ecuación canónica de C es $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = 9$.
  C) C tiene el mismo centro que la circunferencia D de ecuación $x^2 + \frac{4}{5}x + y^2 - \frac{10}{3}y - \frac{239}{225} = 0$
  D) El punto $P = \left(\sqrt{2} + \frac{2}{5}, -\frac{2}{3}\right)$ pertenece a C.

Opción correcta: D)
Resolución
El origen de coordenadas no verifica la ecuación de la circunferencia. Además, la ecuación canónica ofrecida entre las opciones no coincide con C porque el radio es 3. Tampoco es cierto que D tenga el mismo centro que C: las coordenadas de los centros de ambas circunferencias tienen signos opuestos. La única afirmación correcta es que el punto P pertenece a C dado que verifica su ecuación. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.