UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 17/04/2024 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
 Considerá en $\mathbb{R}^4$ al vector $\vec{v} = (k, 1, k^2, k-3)$, con $k \in \mathbb{R}$, y al subespacio $S = \langle (3, 0, 2, 3); (0, 9, -1, -3) \rangle$. Indicá cuál es la única opción que muestra el conjunto de valores de k que hacen que se cumpla que $\vec{v} \in S$.

 A) $\left\{ \frac{2}{3} \right\}$ B) $\left\{ \frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right\}$ C) $\left\{ \frac{1}{3} \right\}$ D) $\left\{ -\frac{1}{3} \right\}$

 Opción correcta: C)
 Resolución
 Para que el vector $\vec{v}$ pertenezca al subespacio S debe cumplirse que sus coordenadas se escriben como combinación lineal de los generadores de S. Planteamos esto y considerando $a, b \in \mathbb{R}$ escribimos: $a \cdot (3, 0, 2, 3) + b \cdot (0, 9, -1, -3) = (k, 1, k^2, k-3)$ Igualando coordenada a coordenada, obtenemos cuatro ecuaciones que nos permiten deducir que $k = \frac{1}{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
 Considerá los subespacios: $S_1 = \langle (1, 1, 1); (1, 3, 0); (2, 4, 1) \rangle$, $S_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 - x_3 = 0 \}$ y $S_3 = \left\langle (4, 1, 1); (0, 1, 1); (2, 1, 1); \left(1, 0, \frac{1}{4}\right) \right\rangle$. Indicá cuál de las siguientes opciones contiene la única afirmación verdadera acerca de las dimensiones de estos subespacios.

 A) S_1, S_2 y S_3 tienen dimensión igual a 3.
 B) S_1 es el único de los tres subespacios con dimensión 3.
 C) S_1, S_2 y S_3 tienen dimensión igual a 2.
 D) S_2 es el único de los tres subespacios con dimensión 3.

 Opción correcta: **este ejercicio será considerado como correcto cualquiera sea la opción elegida, debido a que hubo un error en un dato del problema.**

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
 Elegí la opción que indica las coordenadas del centro y la excentricidad de la elipse de ecuación $16x^2 + 9y^2 - 64x + 54y + 1 = 0$.

 A) Centro=$(-2, 3)$, excentricidad=$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.
 B) Centro=$(2, -3)$, excentricidad=$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.
 C) Centro=$(-2, 3)$, excentricidad=$\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.
 D) Centro=$(2, -3)$, excentricidad=$\dfrac{4}{\sqrt{7}}$.

 Opción correcta: B)
 Resolución
 La ecuación de la elipse ofrecida puede reescribirse como $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ mediante el procedimiento de completar cuadrados. Esta elipse tiene como centro al punto $(2, -3)$. La excentricidad se calcula como $e = \frac{c}{a}$. Como $a = 4$ y $b = 3$ puede calcularse c mediante la fórmula $16 = 9 + c^2$. De ahí se deduce que $|c| = \sqrt{7}$. Entonces $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $16x^2 - 9y^2 - 32x - 36y - 164 = 0$.

  A) $-4x - 3y = 2; -4x + 3y = -10$
  B) $-4x + 3y = 2; -4x - 3y = 10$
  C) $-4x - 3y = -10; -4x + 3y = 2$
  D) $4x + 3y = 2; 4x - 3y = -10$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  La ecuación de la hipérbola puede reescribirse como $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$. Su centro es $(1, -2)$ y sus semiejes son $a = 3$ y $b = 4$. Luego, las ecuaciones de las asíntotas se encuentran como $y + 2 = \pm\frac{b}{a}(x-1)$. De esta igualdad se obtienen las ecuaciones $-4x - 3y = 2; -4x + 3y = -10$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores $\vec{v} = (-5, 0, 6)$ y $\vec{u} = \left(\frac{2}{5}, -1, \frac{4}{3}\right)$, se definen $h \in \mathbb{R}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que $h = \vec{v} \cdot \vec{u}$, y $\vec{w} = h\vec{u} + 2\vec{v}$. Elegí la única opción que muestra la norma de $\vec{w}$.

  A) $35\sqrt{5}$
  B) $\frac{1}{5}\sqrt{12344}$
  C) $\frac{12344}{25}$
  D) $\frac{18}{5}\sqrt{381}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  En primer lugar se puede calcular $h = \left(\frac{2}{5}, -1, \frac{4}{3}\right) \cdot (-5, 0, 6)$ de donde $h = 6$ y con este resultado expresamos $\vec{w} = 6\left(\frac{2}{5}; -1; \frac{4}{3}\right) + 2(-5; 0; 6)$ obteniendo el vector $\vec{w} = \left(-\frac{38}{5}, -6, 20\right)$ cuya norma es $||\vec{w}|| = \frac{1}{5}\sqrt{123444}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores $\vec{a} = (0, 0, 1)$,$\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$, y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = (6, -3, 6)$. Elegí la única opción que muestra los valores de estos escalares.

  A) $\alpha = 6$, $\beta = -3$ y $\gamma = 6$
  B) $\alpha = 9$, $\beta = 3$ y $\gamma = 9$
  C) $\alpha = 6$, $\beta = -9$ y $\gamma = 9$
  D) $\alpha = 9$, $\beta = -9$ y $\gamma = 6$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  En la igualdad reemplazamos los vectores por sus coordenadas:
  $\alpha \cdot (0, 0, 1) + \beta \cdot (0, 1, 1) + \gamma \cdot (1, 1, 1) = (6, -3, 6)$ y a partir de ella surgen tres ecuaciones $0 + 0 + \gamma = 6$, $0 + \beta + \gamma = -3$ y $\alpha + \beta + \gamma = 6$ que nos permiten determinar $\gamma = 6$,$\beta = -9$ y $\alpha = 9$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Considerá las rectas L_1 y L_2 en $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores directores son, respectivamente, $\vec{v} = (2, -1, \sqrt{3})$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$. Elegí la opción que indica el valor que toma el ángulo α entre las rectas L_1 y L_2.

  A) $\alpha = \arccos\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$
  B) $\alpha = \arccos\left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6}\right)$
  C) $\alpha = \arccos\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\right)$
  D) $\alpha = \arccos\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{12}\right)$

  Respuesta: $\boxed{}$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  A partir de $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos(\alpha)$ se obtiene la expresión pedida. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá la recta de ecuación $L = \{X : (1, -2, -5) + (2, -2, -3)\mu; \lambda \in \mathbb{R}\}$ y el plano descripto por $\pi : x + y = 3$. Elegí la única opción que contiene una afirmación verdadera.

A) $(0, 2, 0)$

B) $\emptyset$

C) Todos los puntos del plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, -1, 0) + s(0, 0, 1) + (0, 2, 0),\ t,\ s \in \mathbb{R}\}$

D) $(-1, 3, -2)$

Opción correcta: B)

Resolución

Los puntos de la recta son de la forma $(2\mu + 1, -2\mu - 2, -3\mu - 5)$ reemplazando las coordenadas en $x + y = 3$ obtenemos $-1 = 3$, lo que nos muestra que para cualquier valor de λ los puntos de la recta no se encuentran en el plano con lo cual la respuesta correcta es la B). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.