UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 17/04/2024 - Tema 3

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Considerá en $\mathbb{R}^4$ al vector $\vec{v} = \left(k^2, 1, k, k - \frac{3}{4}\right)$, con $k \in \mathbb{R}$, y al subespacio $S = \langle (1, -4, 0, 3); (1, 0, 1, 1) \rangle$. Indicá cuál es la única opción que muestra el conjunto de valores de k que hacen que se cumpla que $\vec{v} \in S$.

  A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
  B) $\left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}$
  C) $\{1\}$
  D) $\{0\}$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Para que el vector $\vec{v}$ pertenezca al subespacio S debe cumplirse que se pueda escribir como combinación lineal de los generadores de S. Planteamos esto y considerando $a, b \in \mathbb{R}$ escribimos: $a \cdot (1, -4, 0, 3) + b \cdot (1, 0, 1, 1) = \left(k^2, 1, k, k - \frac{3}{4}\right)$ Igualando coordenada a coordenada, obtenemos cuatro ecuaciones que nos permiten deducir que $k = \frac{1}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  Considerá los subespacios: $S_1 = \langle (1, 1, -1); (1, 3, 0); (2, 4, 1) \rangle$, $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_3 = 0\}$ y $S_3 = \left\langle (4, 1, 1); (0, 1, 1); (2, 1, 1); \left(1, 0, \frac{1}{4}\right) \right\rangle$. Indicá cuál de las siguientes opciones contiene la única afirmación verdadera acerca de las dimensiones de estos subespacios.

  A) S_1, S_2 y S_3 tienen dimensión igual a 3.
  B) S_1 es el único de los tres subespacios con dimensión 3.
  C) S_1, S_2 y S_3 tienen dimensión igual a 2.
  D) S_2 es el único de los tres subespacios con dimensión 3.

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Analizando cada subespacio podemos notar que: S_1 tiene dimensión 3, porque el conjunto de sus tres generadores es linealmente independiente.S_2 tiene dimensión 2, lo podemos deducir al expresar una base a partir de sus ecuaciones. Finalmente, analizando el conjunto de generadores de S_3 vemos que es linealmente dependiente, de allí podemos prescindir de dos de los vectores generadores, por ejemplo el último que es múltiplo del primero y el anteúltimo es el doble de la suma de los dos primeros; luego como los dos primeros vectores no son múltiplo, S_3 tiene dimensión 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que indica las coordenadas del centro y la excentricidad de la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y + 49 = 0$.

  A) Centro=$(3, -1)$, excentricidad=$\frac{2}{\sqrt{5}}$.
  B) Centro=$(-3, 1)$, excentricidad=$\frac{3}{\sqrt{5}}$.
  C) Centro=$(3, -1)$, excentricidad=$\frac{\sqrt{5}}{2}$.
  D) Centro=$(-3, 1)$, excentricidad=$\frac{\sqrt{5}}{3}$.

  Opción correcta: D)
  Resolución
  La ecuación de la elipse ofrecida puede reescribirse como $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ mediante el procedimiento de completar cuadrados. Esta elipse tiene como centro al punto $(-3, 1)$. La excentricidad se calcula como $e = \frac{c}{a}$. Como $a = 3$ y $b = 2$ puede calcularse c mediante la fórmula $9 = 4 + c^2$. De ahí se deduce que $|c| = \sqrt{5}$. Entonces $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 0$.

  A) $-4x - 3y = 11; -4x + 3y = 5$

  B) $-4x + 3y = 5; -4x - 3y = -11$

  C) $-4x - 3y = 5; -4x + 3y = 11$

  D) $4x + 3y = 5; 4x - 3y = 11$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  La ecuación de la hipérbola puede reescribirse como $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$. Su centro es $(-2, 1)$ y sus semiejes son $a = 3$ y $b = 4$. Luego, las ecuaciones de las asíntotas se encuentran como $y - 1 = \pm\frac{b}{a}(x + 2)$. De esta igualdad se obtienen las ecuaciones $-4x - 3y = 5; -4x + 3y = 11$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, 5, -\frac{4}{5}\right)$ y $\vec{u} = (3, 0, 5)$, se definen $k \in \mathbb{R}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que $k = \vec{v} \cdot \vec{u}$, y $\vec{w} = 15\vec{v} + k\vec{u}$. Elegí la única opción que muestra la norma de $\vec{w}$.

  A) $35\sqrt{5}$

  B) 6125

  C) $\sqrt{5885}$

  D) $\frac{7}{15}\sqrt{781}$

  Opción correcta:A)
  Resolución
  En primer lugar se puede calcular $k = \left(\frac{2}{3}, 5, \frac{-4}{5}\right) \cdot (3, 0, 5)$ y resulta $k = -2$ y con este resultado podemos escribir $\vec{w} = 15\left(\frac{2}{3}, 5, -\frac{4}{5}\right) + (-2)(3, 0, 5)$ obteniendo el vector $\vec{w} = (4, 75, -22)$ cuya norma es $||\vec{w}|| = 35\sqrt{5}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Consierá los vectores $\vec{u} = (0, 1, 1)$,$\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 0, 1)$, y $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = (3, -6, 3)$. Elegí la única opción que muestra los valores de estos escalares.

  A) $a = -6$, $b = 3$ y $c = 9$

  B) $a = 3$, $b = -9$ y $c = 9$

  C) $a = -9$, $b = 3$ y $c = 9$

  D) $a = 9$, $b = -9$ y $c = 6$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  En la igualdad reemplazamos los vectores por sus coordenadas
  $a \cdot (0, 1, 1) + b \cdot (1, 1, 1) + c \cdot (0, 0, 1) = (3, -6, 3)$ y a partir de ella surgen tres ecuaciones $0 + b + 0 = 3$, $a + b + 0 = -6$ y $a + b + c = 3$ que nos permiten determinar $b = 3$, $a = -9$ y $c = 9$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Considerá las rectas L_1 y L_2 en $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores directores son, respectivamente, $\vec{v} = (1, 1, \sqrt{2})$ y $\vec{w} = (2, 1, 2)$. Elegí la opción que indica el valor que toma el ángulo α entre las rectas L_1 y L_2.

  A) $\alpha = \arccos\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}\right)$

  B) $\alpha = \arccos\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}\right)$

  C) $\alpha = \arccos\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\right)$

  D) $\alpha = \arccos\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{6}\right)$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  A partir de $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos(\alpha)$ se obtiene la expresión pedida. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá la recta de ecuación $L = \{X = (-1, 3, -2) + (1, -1, -1)\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$ y el plano descripto por $\pi : x + y = 2$. Elegí la única opción que contiene una afirmación verdadera.

A) El punto de intersección entre la recta y el plano es $(0, 2, 0)$.

B) $L \cap \pi = \emptyset$

C) Todos los puntos de la recta L están contenidos en $\{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, -1, 0) + s(0, 0, 1) + (0, 2, 0),\ t,\ s \in \mathbb{R}\}$

D) El punto de intersección entre la recta y el plano es $(-1, 3, -2)$.

Opción correcta: C)

Resolución

Los puntos de la recta son de la forma $(\lambda - 1, -\lambda + 3, -\lambda - 2)$ reemplazando las coordenadas en $x + y = 2$ obtenemos $2 = 2$, lo que nos muestra que para cualquier valor de λ los puntos de la recta se encuentran en el plano con lo cual la respuesta correcta es la C). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.