UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 17/04/2024 - Tema 11

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá los subespacios $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle(-1, 1, -2); (14, -1, -6)\rangle$. Indicá la opción que muestra las coordenadas de un vector que pertenezca a S y también pertenezca a T.

A) $(1, 1, 2)$ B) $(14, -1, -6)$ C) $(-15, 2, 4)$ D) $(25, 0, 0)$

Opción correcta: C)
Resolución
Los vectores que pertenecen a T se pueden escribir como $a.(-1, 1, -2) + b.(14, -1, -6)$, es decir de la forma $(-a + 14b, a - b, -2a - 6b)$. Como además se tiene que cumplir que sean vectores de S, reemplazando en la ecuación de este obtenemos que $2(a - b) - (-2a - 6b) = 0$, lo que implica que $a = -b$ y en consecuencia, los vectores buscados son de la forma $(15b, -2b, -4b)$. De entre las opciones notemos que solo la tercera opción cumple esta condición. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá los subespacios $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -x_2 = 0\}$ y
$T = \langle(2, 0, 1); (1, -1, -2); (6, -6, -12); (-1, -1, -3)\rangle$.
Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única verdadera.

A) S y T tienen la misma dimensión y es 3.
B) La dimensión de T es mayor que la dimensión de S.
C) La dimensión de S es 3 y la dimensión de T es 2.
D) S y T tienen la misma dimensión y es 2.

Opción correcta: D)
Resolución
Una base para S es $\{(1, 0, 0); (0, 0, 1)\}$, luego la dimensión de S es 2. Por otro lado, una base para T es $\{(2, 0, 1); (1, -1, -2)\}$ por lo que la dimensión de T también es 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

H es una hipérbola de ecuación $-3x^2 + 4y^2 = 23 - 30x - 32y$. Elegí la opción que muestra las coordenadas del punto de intersección de las asíntotas de H.

A) $(-5, -4)$
B) $(-5, 4)$
C) $(5, -4)$
D) $(5, 4)$

Opción correcta: C)
Resolución
El punto de intersección de las asíntotas de H es el centro de dicha hipérbola. Si se escribe la ecuación canónica de H se obtiene la expresión $\frac{(y+4)^2}{3} - \frac{(x-5)^2}{4} = 1$. Esta expresión permite determinar que el punto de coordenadas $(5, -4)$ es su centro y la intersección de las asíntotas. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
Considerá las ecuaciones de las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 = 3x - 5y - 4,5$ y $C_2 : x^2 + y^2 + 0,5 = 3y + 3x$. Elegí la única opción que muestra una afirmación verdadera.

A) Las circunferencias tienen distinto radio.
B) Las circunferencias se intersecan en un solo punto.
C) Las circunferencias tienen el mismo centro.
D) Las circunferencias se intersecan exactamente en dos puntos.

Opción correcta: B)
Resolución
Si se completa cuadrados en las ecuaciones de cada una de las circunferencias se obtienen las expresiones: $C_1 : (x - 1,5)^2 + (y + 2,5)^2 = 4$ y $C_2 : (x - 1,5)^2 + (y - 1,5)^2 = 4$. De esta forma se puede comprobar que ambas tienen el mismo radio y que no comparten el centro. Debido a que el radio $r = 2$ es el mismo para ambas circunferencias y que la distancia entre los centros de C_1 y de C_2 es 4, las circunferencias tienen un solo punto de intersección. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Considerá en $\mathbb{R}^3$ el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (3, 5)$ y $\vec{c} = (4, 2)$ y la traslación $\vec{t} = (-5, 7)$ que se aplica a dichos vectores. Elegí la única opción que muestra el perímetro del triángulo obtenido.

A) $\sqrt{2} + \sqrt{34} + \sqrt{20}$ B) $\sqrt{56}$ C) $\sqrt{40}$ D) $2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$

Opción correcta: D)
Resolución
El perímetro del triángulo no se modifica al aplicar la traslación, por lo que sólo debemos calcular la suma de las distancias entre los vectores dados:
$d(\vec{a}\ , \vec{b}) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20}$
$d(\vec{b}\ , \vec{c}) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{10}$
$d(\vec{c}\ , \vec{a}) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{10}$
Perímetro= $\sqrt{20} + \sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Considerá un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de norma 3 ortogonal a los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y $\vec{w} = (4, 2, 0)$. Elegí la única opción que muestra las coordenadas de un vector que cumpla con lo pedido.

A) $(1, 2, 2)$ B) $(1, 2, -2)$ C) $(-1, 2, 2)$ D) $(-1, -2, 2)$

Opción correcta: C)
Resolución
Sea $\vec{v} = (x, y, z)$ debe cumplirse $(x, y, z) \cdot (2, 0, 1) = 0$, $(x, y, z) \cdot (4, 2, 0) = 0$. De la primera ecuación surge que debe ser $z = -2x$ y de la segunda que $y = -2x$. Por otro lado para que sea $||(x, y, z)|| = 3$ planteamos $\sqrt{x^2 + (-2x)^2 + (-2x)^2} = 3$ de donde $x^2 = 1$. Los vectores que cumplen con lo solicitado son $(1, -2, -2)$ y $(-1, 2, 2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

La proyección del punto $(1, 1, 3)$ sobre el plano de ecuación $\pi : x + y - 2z = 2$ es el punto:

A) $(-1, -1, -3)$ B) $(1, 1, -2)$ C) $(3, 3, -1)$ D) $(2, 2, 1)$

Opción correcta: D)
Resolución
Para hallar la proyección de $(1, 1, 3)$ debemos hallar la intersección entre el plano y la recta cuya dirección es la misma que la normal, es decir perpendicular al plano, y que pasa por $(1, 1, 3)$. Dicha recta tiene ecuación $(x; y; z) = \alpha \cdot (1, 1, -2) + (1, 1, 3)$. La intersección con el plano da el punto $(2, 2, 1)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las siguientes rectas: $L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0,\ y = 0\}$
$L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = r(-6, 0, -2) + (1, 1, -3),\ r \in \mathbb{R}\}$
Elegí la opción que contiene una afirmación verdadera.

A) L_1 es paralela a L_2.
B) L_2 es perpendicular a L_1.
C) L_1 y L_2 son alabeadas.
D) L_1 y L_2 son coincidentes.

Opción correcta: C)
Resolución
Los vectores directores de estas rectas son respectivamente $v_1 = (-2, 0, 1)$ y $v_2 = (-6, 0, -2)$, de acá vemos que v_1 y v_2 no son múltiplos por lo tanto no son paralelas, y desde luego tampoco coincidentes. Mientras que $v_1 \cdot v_2 \neq 0$ y por lo tanto no son perpendiculares. Por lo cual obtenemos la respuesta correcta que es que son alabeadas. Estos contenidos los encontrás en la sesión 2.
