

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considera en $\mathbb{R}^3$ el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (6, 8)$ y $\vec{c} = (6, -2)$ y la traslación $\vec{t} = (-9, 11)$ que se aplica a dichos vectores. Elegí la única opción que muestra el perímetro del triángulo obtenido.

- A) $10 + 2\sqrt{41}$ B) $\sqrt{82} + 10$ C) $\sqrt{13} + 10 + \sqrt{40}$ D) $10 + \sqrt{53}$

Opción correcta: A)

Resolución

El perímetro del triángulo no se modifica al aplicar la traslación, por lo que sólo debemos calcular la suma de las distancias entre los vectores dados.

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(6-2)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{41}$$

$$d(\vec{b}, \vec{c}) = \sqrt{(6-6)^2 + (-2-8)^2} = 10$$

$$d(\vec{c}, \vec{a}) = \sqrt{(2-6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{41}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{41} + 10 + \sqrt{41} = 10 + 2\sqrt{41}$$

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considera un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de norma 3 ortogonal a los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{w} = (4, -2, 0)$. Elegí la única opción que muestra las coordenadas de un vector que cumpla con lo pedido.

- A) $(-1, -2, -2)$ B) $(1, 2, -2)$ C) $(-1, 2, -2)$ D) $(-1, -2, 2)$

Opción correcta: A)

Resolución

Sea $\vec{v} = (x, y, z)$ debe cumplirse $(x, y, z) \cdot (2, 0, -1) = 0$, $(x, y, z) \cdot (4, -2, 0) = 0$. De la primera ecuación surge que debe ser $z = 2x$ y de la segunda que $y = 2x$. Por otro lado para que sea $\|(x, y, z)\| = 3$ planteamos $\sqrt{x^2 + (2x)^2 + (2x)^2} = 3$ de donde $x^2 = 1$. Los vectores que cumplen con lo solicitado son $(1, 2, 2)$ y $(-1, -2, -2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

La proyección del punto $(3, 1, 1)$ sobre el plano de ecuación $\pi : -2x + y + z = 2$ es el punto:

- A) $(-3, -1, -1)$ B) $(1, 2, 2)$ C) $(-1, 3, 3)$ D) $(-2, 1, 1)$

Opción correcta: B)

Resolución

Para hallar la proyección de $(3, 1, 1)$ debemos hallar la intersección entre el plano y la recta cuya dirección es la misma que la normal, es decir perpendicular al plano, y que pasa por $(3, 1, 1)$. Dicha recta tiene ecuación $(x; y; z) = \alpha \cdot (-2, 1, 1) + (3, 1, 1)$. La intersección con el plano da el punto $(1, 2, 2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considera las siguientes rectas: $L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0, z = 0\}$

$L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = r(3, 0, 1) + (-4, 5, -3), r \in \mathbb{R}\}$

Elegí la opción que contiene una afirmación verdadera.

- A) L_2 es perpendicular a L_1 .
B) L_1 es paralela a L_2 .
C) L_1 y L_2 son coincidentes.
D) L_1 y L_2 son alabeadas.

Opción correcta: D)

Resolución

Los vectores directores de estas rectas son respectivamente $v_1 = (-2, 1, 0)$ y $v_2 = (3, 0, 1)$, de acá vemos que v_1 y v_2 no son múltiplos por lo tanto no son paralelas, y desde luego tampoco coincidentes. Mientras que $v_1 \cdot v_2 \neq 0$ y por lo tanto no son perpendiculares. Por lo cual obtenemos la respuesta correcta que es que son alabeadas. Estos contenidos los encontrás en la sesión 2.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá los subespacios $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + 2x_3 = 0\}$ y $T = \langle (-1, 1, -2); (-1, -4, -16) \rangle$. Indicá la opción que muestra las coordenadas de un vector que pertenezca a S y también pertenezca a T .

- A) $(11, -16, 8)$ B) $(-12, 1, 0)$ C) $(-6, 8, -4)$ D) $(-2, -3, -18)$

Opción correcta: A)

Resolución

Los vectores que pertenecen a T se pueden escribir como $a \cdot (-1, 1, -2) + b \cdot (-1, -4, -16)$, es decir de la forma $(-a - b, a - 4b, -2a - 16b)$. Como además se tiene que cumplir que sean vectores de S , reemplazando en la ecuación de este obtenemos que $a - 4b + 2(-2a - 16b) = 0$, lo que implica que $a = -12b$ y en consecuencia, los vectores buscados son de la forma $(11b, -16b, 8b)$. De entre las opciones notemos que solo la primera opción cumple esta condición. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá los subespacios $S = \langle (2, 0, 1); (1, -1, -2); (-5, 5, 10); (-1, -1, -3) \rangle$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -x_1 - 2x_2 = 0; x_3 = 0\}$.

Indicá cuál de las siguientes afirmaciones es la única verdadera.

- A) S y T tienen la misma dimensión y es 3.
B) La dimensión de S es mayor que la dimensión de T .
C) La dimensión de T es 3 y la dimensión de S es 1.
D) S y T tienen la misma dimensión y es 2.

Opción correcta: B)

Resolución

Una base para S es $\{(2, 0, 1); (1, -1, -2)\}$, luego la dimensión de S es 2. Por otro lado, una base para T es $\{(-2, 1, 0)\}$ por lo que la dimensión de T es 1. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

H es una hipérbola de ecuación $-4x^2 + 3y^2 = 1 + 32x + 30y$. Elegí la opción que muestra las coordenadas del punto de intersección de las asíntotas de H .

- A) $(-4, -5)$
B) $(4, -5)$
C) $(4, 5)$
D) $(-4, 5)$

Opción correcta: D)

Resolución

El punto de intersección de las asíntotas de H es el centro de dicha hipérbola. Si se escribe la ecuación canónica de H se obtiene la expresión $\frac{(y-5)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{3} = 1$. Esta expresión permite determinar que el punto de coordenadas $(-4, 5)$ es su centro y la intersección de las asíntotas. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las ecuaciones de las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 + 4,5 = -3x - 5y$ y $C_2 : x^2 + y^2 + 0,5 = 3y - 3x$. Elegí la única opción que muestra una afirmación verdadera.

- A) Las circunferencias se intersecan exactamente en dos puntos.
- B) Las circunferencias tienen distinto radio.
- C) Las circunferencias se intersecan en un solo punto.
- D) Las circunferencias tienen el mismo centro.

Opción correcta: C)

Resolución

Si se completa cuadrados en las ecuaciones de cada una de las circunferencias se obtienen las expresiones: $C_1 : (x + 1,5)^2 + (y + 2,5)^2 = 4$ y $C_2 : (x + 1,5)^2 + (y - 1,5)^2 = 4$. De esta forma se puede comprobar que ambas tienen el mismo radio y que no comparten el centro. Debido a que el radio $r = 2$ es el mismo para ambas circunferencias y que la distancia entre los centros de C_1 y de C_2 es 4, las circunferencias tienen un solo punto de intersección. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.
