UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Recuperatorio del 2do. parcial
15/11/2023 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

  Considerá los números complejos:

  - $z = -3 + 3i$
  - $w = 5 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 5i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
  - $u = \dfrac{\overline{z} \cdot w^3}{-5\sqrt{2}i}$

  Indicá la única opción que corresponde a una expresión para u.

  A) $75 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

  B) $75 \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(\pi))$

  C) $75 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

  D) $75 \cdot (\cos(0) + i \cdot \operatorname{sen}(0))$

  Opción correcta: D)
  Resolución: calculando el módulo de u nos queda: $|u| = \left|\frac{\overline{z} \cdot w^3}{-5\sqrt{2}i}\right| = \frac{|\overline{z}| \cdot |w|^3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 125}{5\sqrt{2}} = 75$.
  Ahora podemos averiguar los argumentos de cada complejo y mediante el uso de propiedades determinar el argumento del conjugado de z, de w al cubo, del producto $\overline{z} \cdot w^3$ y finalmente el argumento de cociente que forma a u.
  $arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z) = 2\pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi$
  $arg(w^3) = 3 \cdot arg(w) - 2\pi = \frac{\pi}{4}$
  $arg(\overline{z} \cdot w^3) = \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$
  $arg(-5\sqrt{2}i) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow arg(u) = \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 0$.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

  Sea $z \in \mathbb{C}$ que cumple la ecuación $\dfrac{6 - 9i}{z} = \dfrac{-6 + 3i}{-2 + i}$ y sea $w \in \mathbb{C}$ que verifica que $Re(w) \cdot (6 - i) = w - (10 + i)$. Indicá cuál es la única opción verdadera.

  A) $z = w$

  B) $z = \overline{w}$

  C) $z = -w$

  D) $z = -\overline{w}$

  Opción correcta: C)
  Resolución: abordando la primera de las ecuaciones, obtenemos que:
  $\frac{6-9i}{z} = \frac{-6+3i}{-2+i} \Leftrightarrow z = \frac{(6+9i)\cdot(-2+i)}{-6+3i} \Leftrightarrow z = 2 - 3i$
  Ahora resolviendo la segunda ecuación, considerando $w = a + bi$, nos queda lo siguiente:
  $a \cdot (6 - i) = a + bi - 10 - i \Leftrightarrow 6a - ai = (a - 10) + (b - 1)i$ de donde se deduce que $6a = a - 10$ y $-a = b - 1$ por lo que $w = a + bi = -2 + 3i$. Finalmente, podemos concluir que de las opciones la única que se cumple es la tercera. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

  Elegí la opción que muestra el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que tiene solo dos raíces comunes con $5x^3 + 40$, que posee una raíz doble en $x = \dfrac{2}{3}$ y que verifica que $P(1) = 3$.

  A) $9x^4 - 30x^3 + 64x^2 - 56x + 16$

  B) $x^4 - \dfrac{10}{3}x^3 + \dfrac{64}{9}x^2 - \dfrac{56}{9}x + \dfrac{16}{9}$

  C) $3x^5 - 4x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + 24x^2 + 32x + \dfrac{32}{3}$

  D) $\dfrac{9}{25}x^4 - \dfrac{6}{25}x^3 + \dfrac{16}{25}x^2 + \dfrac{8}{5}x + \dfrac{16}{25}$

  Opción correcta:A)

Resolución: las raíces de $5x^3+40$ son $x_1=-2, x_2=1+\sqrt{3}i, x_3=1-\sqrt{3}i$. Si $P(x)$ tiene exactamente dos raíces en común, estas deben ser las raíces no reales.Teniendo en cuenta que $\frac{2}{3}$ es raíz doble y que el polinomio debe ser de grado mínimo, podemos expresar $P(x)=a\cdot(x^2-2x+4)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$, el valor de a lo determinamos para que resulte $P(1)=3$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá los polinomios $P(x)=10x^3+2x^2-15x-3$ y $Q(x)=4x^4-12x^2+9$.
Elegí la opción que muestra un polinomio que es divisor de ambos.

A) $x+\dfrac{1}{5}$

B) $3x^2-2$

C) $x-\dfrac{1}{5}$

D) $2x^2-3$

Opción correcta:D)
Resolución: aplicando el teorema del resto $Q(\frac{1}{5})\neq 0$ y $Q(-\frac{1}{5})\neq 0$ podemos descartar la primera y tercera opción. Y aplicando el algoritmo de la división podemos verificar que ambos polinomios son divisibles por $3x^2-2$. También podemos buscar la expresión factorizada de cada polinomio $P(x)=10x^3+2x^2-15x-3=(2x^2-3)\cdot(5x+1)$ y$Q(x)=4x^4-12x^2+9=(2x^2-3)^2$ y reconocer el factor que aparece en ambos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ -4 & -3 & a\\ -1 & b & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}58\\ -3\\ 13\end{pmatrix}$. Elegí la opción que muestra los valores de a y de b de manera tal que se verifique la igualdad $A\cdot B=C$.

A) $a=-3$ y $b=26$.

B) $a=-3$ y $b=-26$.

C) $a=3$ y $b=26$.

D) $a=3$ y $b=-26$.

Opción correcta: B)

Resolución: si realizás el producto $A\cdot B$ vas a obtener la matriz $\begin{pmatrix}-a-2b+3\\ -2a-9\\ -b-13\end{pmatrix}$.

Al igualar esta matriz con C obtendrás los valores de a y de b. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 9.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A=\begin{pmatrix}k & 3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -3 & 0 & k^2\end{pmatrix}$ con $k\in\mathbb{R}$.

Elegí la única opción que indica el/los valores de k para el/los cual/es la matriz es inversible.

A) $|k|\neq\sqrt{3}$

B) $k\in\mathbb{R}$

C) $|k|=\sqrt{3}$

D) Para ningún valor del número real k

Opción correcta: A)
Resolución: el determinante de la matriz A está dado por la expresión $-3k^2+9$. La matriz será inversible si el determinante no es nulo. Esto sucede para los valores de k distintos de $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T(x_1;x_2;x_3)=(x_1-x_2+3x_3;x_1-x_3;2x_1-x_3)$ definida para $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Elegí la opción que muestra la dimensión del núcleo.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Opción correcta: A)

Resolución: una forma de visualizar esto es escribir la matriz asociada a T: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

si triangulamos esta matriz tenemos $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como el rango de la matriz es tres tenemos que la dimensión de la imagen también es tres y, por el teorema de la dimensión, el núcleo tiene dimensión 0. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá $T(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; -x_1 - x_2)$ y $S(x_1; x_2) = (2x_1 + x_2; x_1 - 2x_2)$, dos transformaciones lineales. Elegí la opción que muestra el determinante de la matriz asociada a $T^{-1} \circ S$.

  A) $\frac{5}{4}$ B) $-\frac{8}{4}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $-\frac{5}{2}$

  Opción correcta: C)

  Resolución: las expresiones matriciales de T y S son, respectivamente: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces tenemos que $M_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

  con lo cual $M_{T^{-1} \circ S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

  Entonces $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.
