UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Recuperatorio del 2do. parcial
15/11/2023 - Tema 1

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ -3 & a & -4 \\ b & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -25 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$. Elegí la opción que muestra los valores de a y de b de manera tal que se verifique la igualdad $A \cdot B = C$.

A) $a = -8$ y $b = 1$.

B) $a = 8$ y $b = -1$.

C) $a = 8$ y $b = 1$.

D) $a = -8$ y $b = -1$.

Opción correcta: D)

Resolución: si realizás el producto $A \cdot B$ vas a obtener la matriz $\begin{pmatrix} 3a - b - 2 \\ -a - 1 \\ 3b - 3 \end{pmatrix}$. Al igualar esta matriz con C obtendrás los valores de a y de b. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8 y 9.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & k^2 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

Elegí la única opción que indica el/los valores de k para el/los cual/es la matriz es inversible.

A) $|k| = \sqrt{2}$

B) $k \in \mathbb{R}$

C) $|k| \neq \sqrt{2}$

D) Para ningún valor del número real k

Opción correcta: C)

Resolución: el determinante de la matriz A está dado por la expresión $-2k^2 + 4$. La matriz será inversible si el determinante no es nulo. Esto sucede para los valores de k distintos de $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3; x_1 + x_3; 2x_1 - 3x_3)$. Elegí la opción que muestra la dimensión de la imagen.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

Opción correcta: D)

Resolución: una forma de visualizar esto es escribir la matriz asociada a T: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Si triangulamos esta matriz tenemos $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Como el rango de la matriz es tres tenemos que la dimensión de la imagen es también tres. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá $T(x_1; x_2) = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2; -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2)$ y $S(x_1; x_2) = (2x_1 - x_2; x_1 + 2x_2)$.
Elegí la opción que muestra el valor del determinante de la matriz asociada a $T^{-1} \circ S$.

A) -8

B) -20

C) 20

D) -8

Opción correcta: B)

Resolución: las expresiones matriciales de T y S son, respectivamente:
$M_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ y $M_S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces tenemos que $M_T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ con lo cual $M_{T^{-1} \circ S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces: $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -20$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá los números complejos:

- $z = -4 - 4i$
- $w = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 10i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- $u = \dfrac{\overline{z} \cdot w^3}{10\sqrt{2}i}$

Indicá la única opción que corresponde a una expresión para u.

A) $400 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

B) $400 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

C) $400 \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(\pi))$

D) $400 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Opción correcta: C)
Resolución: calculando el módulo de u nos queda: $|u| = \left|\frac{\overline{z} \cdot w^3}{10\sqrt{2}i}\right| = \frac{|\overline{z}| \cdot |w|^3}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{32} \cdot 1000}{10\sqrt{2}} = 400$.
Ahora podemos averiguar los argumentos de cada complejo y mediante el uso de propiedades determinar el argumento del conjugado de z, de w al cubo, del producto $\overline{z} \cdot w^3$ y finalmente el argumento del cociente que forma a u.
$arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z) = 2\pi - \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$
$arg(w^3) = 3 \cdot arg(w) = \frac{3\pi}{4}$
$arg(\overline{z} \cdot w^3) = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$
$arg(10\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow arg(u) = \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = \pi$
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Sea $z \in \mathbb{C}$ que cumple la ecuación $\dfrac{2-i}{z} = \dfrac{16-8i}{-4-8i}$ y sea $w \in \mathbb{C}$ que verifica que $Re(w) \cdot (3-4i) = \overline{w} - 3i + 1$. Indicá cuál es la única opción verdadera.

A) $z = w$ B) $z = \overline{w}$ C) $z = -w$ D) $z = -\overline{w}$

Opción correcta: D)
Resolución: abordando la primera de las ecuaciones, obtenemos que:
$\frac{2-i}{z} = \frac{16-8i}{-4-8i} \Leftrightarrow z = \frac{(2-i)\cdot(-4-8i)}{(16-8i)} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - i$
Ahora resolviendo la segunda ecuación, considerando $w = a + bi$, nos queda lo siguiente:
$a \cdot (3-4i) = a - bi - 3i + 1 \Leftrightarrow 3a - 4ai = (a+1) + (-b-3)i$ de donde se deduce que $3a = a + 1$ y $-4a = -b - 3$ por lo que $w = a + bi = \frac{1}{2} - i$. Finalmente, podemos concluir que de las opciones la única que se cumple es la cuarta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que tiene solo dos raíces comunes con $5x^3 - 40$, que posee una raíz doble en $x = -\frac{5}{3}$ y que verifica que $P(-1) = 4$

A) $x^4 + \dfrac{16}{3}x^3 + \dfrac{121}{9}x^2 + \dfrac{170}{9}x + \dfrac{100}{9}$

B) $3x^4 + 16x^3 + \dfrac{121}{3}x^2 + \dfrac{170}{3}x + \dfrac{100}{3}$

C) $5x^5 + \dfrac{50}{3}x^4 + \dfrac{125}{9}x^3 - 40x^2 - \dfrac{400}{3}x - \dfrac{1000}{9}$

D) $\dfrac{3}{16}x^4 - \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{1}{48}x^2 - \dfrac{35}{24}x + \dfrac{50}{24}$

Opción correcta:B)
Resolución: las raíces de $5x^3 - 40$ son $x_1 = 2, x_2 = -1 + \sqrt{3}i, x_3 = -1 - \sqrt{3}i$. Si $P(x)$ tiene exactamente dos raíces en común, estas deben ser las raíces no reales. Teniendo en cuenta que $-\frac{5}{3}$ es raíz doble y que el polinomio debe ser de grado mínimo, podemos expresar
$P(x) = a \cdot (x^2 + 2x + 4) \cdot \left(x + \frac{5}{3}\right)^2$ y el valor de a lo determinamos para que resulte $P(-1) = 4$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
 Considerá los polinomios $A(x) = 6x^3 + 3x^2 - 4x - 2$ y $B(x) = 9x^4 - 12x^2 + 4$.
 Elegí la opción que muestra un polinomio que es divisor de ambos.

 A) $x - \dfrac{1}{2}$
 B) $3x^2 - 2$
 C) $x + \dfrac{1}{2}$
 D) $2x^2 - 3$

Opción correcta:B)
Resolución: aplicando el teorema del resto $B(\frac{1}{2}) \neq 0$ y $B(-\frac{1}{2}) \neq 0$ por lo que descartamos la primera y tercera opción. Y aplicando el algoritmo de la división podemos verificar que ambos polinomios son divisibles por $3x^2 - 2$. También podemos buscar la expresión factorizada de cada polinomio $A(x) = 6x^3 + 3x^2 - 4x - 2 = (3x^2 - 2) \cdot (2x + 1)$ y$B(x) = 9x^4 - 12x^2 + 4 = (3x^2 - 2)^2$ y reconocer el factor que aparece en ambos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
