UBAXXI - Álgebra A - Resolución Recuperatorio del 1° parcial - 15/11/2023 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

  Sabiendo que $\{(1,-1,-1,-1,1),(2\alpha+\beta+\gamma,\alpha-\beta-\gamma,2\alpha-\gamma+\beta,-1,4),(1,0,-1,1,2)\}$ es linealmente dependiente, elegí la opción que muestra la terna de valores que es la correcta.

  A) $$\alpha=\frac{1}{3},\beta=\frac{4}{3},\gamma=3$$

  B) $$\alpha=-\frac{1}{3},\beta=-\frac{4}{3},\gamma=3$$

  C) $$\alpha=\frac{1}{3},\beta=-\frac{2}{3},\gamma=3$$

  D) $$\alpha=\frac{1}{3},\beta=\frac{2}{3},\gamma=3$$

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Si se plantea la combinación lineal $2(1,-1,-1,-1,1)+(1,0,-1,1,2)=(3,-2,-3,-1,4)$ se puede concluir que $2(1,-1,-1,-1,1)+(1,0,-1,1,2)=(2\alpha+\beta+\gamma,\alpha-\beta-\gamma,2\alpha-\gamma+\beta,-1,4)$ de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma=3 \\ \alpha-\beta-\gamma=-2 \\ 2\alpha-\gamma+\beta=-3 \end{cases}$$

  el cual tiene como solución no trivial $\alpha=\frac{1}{3},\beta=-\frac{2}{3},\gamma=3$, con lo cual es la única terna que es solución del sistema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

  Sabiendo que $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4: -x_1+2x_3=-2x_2\}$, elegí la opción que muestra la terna de valores que hacen que el vector $(\alpha,\beta,\gamma,\gamma)$ pertenezca a S.

  A) $$\alpha=4,\beta=-1,\gamma=0$$

  B) $$\alpha=2,\beta=0,\gamma=1$$

  C) $$\alpha=-4,\beta=1,\gamma=-1$$

  D) $$\alpha=4,\beta=1,\gamma=1$$

  Opción correcta: B) ó D)

  Resolución

  De las ecuaciones que definen S tenemos que darnos cuenta que basta con reemplazar con las componentes de $(\alpha,\beta,\gamma,\gamma)$ y que a partir de esto obtenemos $2\beta+2\gamma=\alpha$, que tiene infinitas soluciones. Las ternas ofrecidas en B) y en D) verifican lo pedido. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

  Una circunferencia cuya ecuación es $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2+10x+ky=2\}$ contiene al punto $A=(-11,3)$. Indicá la única opción que muestra las coordenadas del centro O y el radio r de C.

  A) $O=(5,-3), r=36$

  B) $O=(11,-3), r=2$

  C) $O=(-5,3), r=6$

  D) $O=(6,-3), r=5$

  Opción correcta: C)

Resolución
En la expresión general de la circunferencia $x^2+y^2+10x+ky=2$ reemplazamos las coordenadas del punto A de lo que resulta $(-11)^2+3^2+10(-11)+3k=2$, que nos permite determinar $k=-6$. Completando cuadrados para $x^2+y^2+10x-6y=2$ obtenemos la expresión canónica $C:(x+5)^2+(y-3)^2=36$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
 Cierta parábola tiene vértice en $V=(-3,4)$, y su directriz es la recta $x=-0,5$.
Seleccioná la única opción que muestra la expresión general de esta parábola.

A) $$10x+14=y^2-8y$$

B) $$10y^2+x-80y=-163$$

C) $$y^2-16=-10x-30$$

D) $$-y^2-10x+8y=46$$

Opción correcta: D)

Resolución
Teniendo en cuenta la información brindada, la parábola es de la forma $(y-k)^2=2p(x-h)$ y su directriz $x=h-\frac{p}{2}$. Reemplazamos con los datos para la directriz $-0{,}5=-3-\frac{p}{2}$, lo que nos permite determinar $p=-5$. La expresión canónica de la parábola es $(y-4)^2=-10(x+3)$, cuyo desarrollo nos lleva a la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
 Considerá tres vectores en $\mathbb{R}^3$: $\vec{v}=(2,3,-4)$, $\vec{u}=(2,0,4)$ y $\vec{w}=(x,0,z)$ con $x,z\in\mathbb{R}^+$.
Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ y $||\vec{w}||=||\vec{u}||$, elegí la única opción que muestra las coordenadas de $\vec{w}$.

A) $(0,4,2)$

B) $(4,0,2)$

C) $(4,2,0)$

D) $(2,4,0)$

Opción correcta: B)

Resolución
Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ entonces $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$ de donde se deduce que $x=2z$. Como $||\vec{w}||=||\vec{u}||=\sqrt{20}$ entonces $||\vec{w}||=\sqrt{z^2+(2z)^2}=\sqrt{20}$. Como $\vec{w}$ tiene sus coordenadas positivas, la única solución es $z=2$ por lo que $\vec{w}=(4,0,2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
 Considerá dos vectores en $\mathbb{R}^2$: $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=15$, la norma de $\vec{v}$ es 4 y el ángulo determinado entre ambos vectores es $\frac{\pi}{6}$, elegí la única opción que indica la norma de $\vec{u}$.

A) $$\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

B) $$\frac{5}{2}$$

C) $$\frac{5}{2\sqrt{3}}$$

D) $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Opción correcta: A)

Resolución
Si planteás la fórmula de producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y reemplazás por los datos del enunciado, $15=||\vec{u}||\cdot 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, podés deducir que $||\vec{u}||=\frac{15}{6}\sqrt{3}$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
  Considerá las rectas de ecuación $L_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \mu(0,1,2) + (1,0,-1), \mu \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x - 2y + z = -2, y + z = 5\}$. Indicá la única opción que muestra las coordenadas del punto $P = L_1 \cap L_2$.

  A) $(0,1,1)$ B) $(1,2,3)$ C) $(0,1,2)$ D) $(1,1,1)$

  Opción correcta: B)

  Resolución
  Lo que podemos hacer es ver si alguno de los puntos de la primera recta cumple las ecuaciones de la segunda. Esto lo hacemos reemplazando: $-1 - 2\mu + 2\mu - 1 = -2$ y $\mu + 2\mu - 1 = 5$. De este sistema de ecuaciones deducimos que $\mu = 2$. Luego, el punto $P = (1,2,3)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
  Considerá el plano de ecuación $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 8\}$ y el punto $P = (-1,0,-8)$. Indicá la única opción que muestra una afirmación verdadera.

  A) La proyección ortogonal de P en el plano Π es $\left(\frac{6}{11}, -\frac{51}{11}, -\frac{71}{11}\right)$.
  B) La proyección ortogonal de P en el plano Π es $\left(\frac{26}{11}, -\frac{45}{11}, -\frac{73}{11}\right)$.
  C) P es simétrico a $\left(\frac{6}{11}, -\frac{51}{11}, -\frac{71}{11}\right)$ respecto del plano Π .
  D) P es simétrico a $\left(\frac{26}{11}, -\frac{45}{11}, -\frac{73}{11}\right)$ respecto del plano Π.

  Opción correcta: A)

  Resolución
  Para hallar la proyección de P sobre el plano dado, podemos construir la recta ortogonal al plano que pasa por P. La intersección de plano con recta nos dará el punto Q, la proyección ortogonal de P sobre Π. Por otro lado, usando que el punto R, simétrico de P respecto del plano Π cumple que $\frac{P+R}{2} = Q$ podemos hallar sus coordenadas.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.
