UBAXXI - Álgebra A - Resolución Recuperatorio del 1° parcial - 15/11/2023 - Tema 2

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Considerá tres vectores en $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = (2, 3, -4)$, $\vec{u} = (2, 0, 4)$ y $\vec{w} = (x, 0, z)$ con $x, z \in \mathbb{R}^+$.
Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ y $||\vec{w}|| = ||\vec{u}||$, elegí la única opción que muestra las coordenadas de $\vec{w}$.

A) $(0, 4, 2)$
B) $(4, 0, 2)$
C) $(4, 2, 0)$
D) $(2, 4, 0)$

Opción correcta: B)

Resolución
Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ entonces $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ de donde se deduce que $x = 2z$. Como $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| = \sqrt{20}$ entonces $||\vec{w}|| = \sqrt{z^2 + (2z)^2} = \sqrt{20}$. Como $\vec{w}$ tiene sus coordenadas positivas, la única solución es $z = 2$ por lo que $\vec{w} = (4, 0, 2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Considerá dos vectores en $\mathbb{R}^2$: $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$, la norma de $\vec{v}$ es 4 y el ángulo determinado entre ambos vectores es $\frac{\pi}{6}$, elegí la única opción que indica la norma de $\vec{u}$.

A) $$\frac{5}{2}\sqrt{3}$$
B) $$\frac{5}{2}$$
C) $$\frac{5}{2\sqrt{3}}$$
D) $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Opción correcta: A)

Resolución
Si planteás la fórmula de producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y reemplazás por los datos del enunciado, $15 = ||\vec{u}|| \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, podés deducir que $||\vec{u}|| = \frac{15}{6}\sqrt{3}$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

Considerá las rectas de ecuación $L_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \mu(0, 1, 2) + (1, 0, -1), \mu \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x - 2y + z = -2, y + z = 5\}$. Indicá la única opción que muestra las coordenadas del punto $P = L_1 \cap L_2$.

A) $(0, 1, 1)$
B) $(1, 2, 3)$
C) $(0, 1, 2)$
D) $(1, 1, 1)$

Opción correcta: B)

Resolución
Lo que podemos hacer es ver si alguno de los puntos de la primera recta cumple las ecuaciones de la segunda. Esto lo hacemos reemplazando: $-1 - 2\mu + 2\mu - 1 = -2$ y $\mu + 2\mu - 1 = 5$. De este sistema de ecuaciones deducimos que $\mu = 2$. Luego, el punto $P = (1, 2, 3)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)

Considerá el plano de ecuación $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 8\}$ y el punto $P = (-1, 0, -8)$.
Indicá la única opción que muestra una afirmación verdadera.

A) La proyección ortogonal de P en el plano Π es $\left(\frac{6}{11}, -\frac{51}{11}, -\frac{71}{11}\right)$.
B) La proyección ortogonal de P en el plano Π es $\left(\frac{26}{11}, -\frac{45}{11}, -\frac{73}{11}\right)$.
C) P es simétrico a $\left(\frac{6}{11}, -\frac{51}{11}, -\frac{71}{11}\right)$ respecto del plano Π .
D) P es simétrico a $\left(\frac{26}{11}, -\frac{45}{11}, -\frac{73}{11}\right)$ respecto del plano Π.

Opción correcta: A)

Resolución
Para hallar la proyección de P sobre el plano dado, podemos construir la recta ortogonal al plano que pasa por P. La intersección de plano con recta nos dará el punto Q, la proyección ortogonal de P sobre Π. Por otro lado, usando que el punto R, simétrico de P respecto del plano Π cumple que $\frac{P+R}{2} = Q$ podemos hallar sus coordenadas.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
Sabiendo que $\{(1,-1,-1,-1,1),(2\alpha+\beta+\gamma,\alpha-\beta-\gamma,2\alpha-\gamma+\beta,-1,4),(1,0,-1,1,2)\}$ es linealmente dependiente, elegí la opción que muestra la terna de valores que es la correcta.

A)
$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3}, \gamma = 3$$

B)
$$\alpha = -\frac{1}{3}, \beta = -\frac{4}{3}, \gamma = 3$$

C)
$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{2}{3}, \gamma = 3$$

D)
$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{2}{3}, \gamma = 3$$

Opción correcta: C)

Resolución
Si se plantea la combinación lineal $2(1,-1,-1,-1,1)+(1,0,-1,1,2) = (3,-2,-3,-1,4)$ se puede concluir que $2(1,-1,-1,-1,1)+(1,0,-1,1,2) = (2\alpha+\beta+\gamma,\alpha-\beta-\gamma,2\alpha-\gamma+\beta,-1,4)$ de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma = 3 \\ \alpha-\beta-\gamma = -2 \\ 2\alpha-\gamma+\beta = -3 \end{cases}$$

el cual tiene como solución no trivial $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{2}{3}, \gamma = 3$, con lo cual es la única terna que es solución del sistema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
Sabiendo que $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : -x_1+2x_3 = -2x_2\}$, elegí la opción que muestra la terna de valores que hacen que el vector $(\alpha,\beta,\gamma,\gamma)$ pertenezca a S.

A)
$$\alpha = 4, \beta = -1, \gamma = 0$$

B)
$$\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = 1$$

C)
$$\alpha = -4, \beta = 1, \gamma = -1$$

D)
$$\alpha = 4, \beta = 1, \gamma = 1$$

Opción correcta: B) ó D)

Resolución
De las ecuaciones que definen S tenemos que darnos cuenta que basta con reemplazar con las componentes de $(\alpha,\beta,\gamma,\gamma)$ y que a partir de esto obtenemos $2\beta+2\gamma = \alpha$, que tiene infinitas soluciones. Las ternas ofrecidas en B) y en D) verifican lo pedido. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
Una circunferencia cuya ecuación es $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+10x+ky = 2\}$ contiene al punto $A = (-11,3)$. Indicá la única opción que muestra las coordenadas del centro O y el radio r de C.

A) $O = (5,-3), r = 36$

B) $O = (11,-3), r = 2$

C) $O = (-5,3), r = 6$

D) $O = (6,-3), r = 5$

Opción correcta: C)

Resolución

En la expresión general de la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x + ky = 2$ reemplazamos las coordenadas del punto A de lo que resulta $(-11)^2 + 3^2 + 10(-11) + 3k = 2$, que nos permite determinar $k = -6$. Completando cuadrados para $x^2 + y^2 + 10x - 6y = 2$ obtenemos la expresión canónica $C : (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)

  Cierta parábola tiene vértice en $V = (-3, 4)$, y su directriz es la recta $x = -0,5$.

  Seleccioná la única opción que muestra la expresión general de esta parábola.

A)
$$10x + 14 = y^2 - 8y$$

B)
$$10y^2 + x - 80y = -163$$

C)
$$y^2 - 16 = -10x - 30$$

D)
$$-y^2 - 10x + 8y = 46$$

Opción correcta: D)

Resolución

Teniendo en cuenta la información brindada, la parábola es de la forma $(y - k)^2 = 2p(x - h)$ y su directriz $x = h - \frac{p}{2}$. Reemplazamos con los datos para la directriz $-0{,}5 = -3 - \frac{p}{2}$, lo que nos permite determinar $p = -5$. La expresión canónica de la parábola es $(y - 4)^2 = -10(x + 3)$, cuyo desarrollo nos lleva a la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.
