UBAXXI - Álgebra A - Resolución Recuperatorio del 1° parcial - 15/11/2023 - Tema 1

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)
  Considerá tres vectores en $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = (-4, 5, 2)$, $\vec{u} = (4, 0, -2)$ y $\vec{w} = (x, 0, z)$ con $x, z \in \mathbb{R}^-$.
  Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ y $||\vec{w}|| = ||\vec{u}||$, elegí la única opción que muestra las coordenadas de $\vec{w}$.

  A) $w = (0, -4, -2)$ B) $w = (-2, -4, 0)$ C) $w = (-4, -2, 0)$ D) $w = (-2, 0, -4)$

  Opción correcta: D)

  Resolución
  Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ entonces $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ de donde se deduce que $z = 2x$. Como $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| = \sqrt{20}$ entonces $||\vec{w}|| = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{20}$. Como $\vec{w}$ tiene sus coordenadas negativas, la única solución es $x = -2$ por lo que $\vec{w} = (-2, 0, -4)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)
  Considerá dos vectores en $\mathbb{R}^2$: $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 17$, la norma de $\vec{v}$ es 4 y el ángulo determinado entre ambos vectores es $\frac{\pi}{6}$, elegí la única opción que indica la norma de $\vec{u}$.

  A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{17}{6}$ C) $\frac{17}{6\sqrt{3}}$ D) $\frac{17}{6}\sqrt{3}$

  Opción correcta: D)

  Resolución
  SI planteás la fórmula de producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y reemplazás por los datos del enunciado, $17 = ||\vec{u}|| \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, podés deducir que $||\vec{u}|| = \frac{17}{6}\sqrt{3}$.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)
  Considerá las rectas $L_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \mu(-1, 1, 2) + (1, 0, -1), \mu \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + z = 1; -2x + y - z = -2\}$.
  Indicá la única opción que muestra las coordenadas del punto $P = L_1 \cap L_2$

  A) $P = (0, 1, 1)$ B) $P = (2, -1, -3)$ C) $P = (1, 0, -1)$ D) $P = (-1, 1, 2)$

  Respuesta: $\boxed{}$

  Opción correcta: B)

  Resolución
  Lo que podemos hacer es ver si alguno de los puntos de la primera recta cumple las ecuaciones de la segunda. Esto lo hacemos reemplazando: $2(-\mu+1)+2\mu-1 = 1$ y $-2(-\mu+1)+\mu-(2\mu-1) = -2$. De este sistema de ecuaciones deducimos que $\mu = -1$ y, el punto intersección es $P = (2, -1, -3)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
  Considerá el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 8\}$ y el punto $P = (1, 1, 0)$.
  Indicá la única opción que muestra una afirmación verdadera.

  A) La proyección ortogonal de P en el plano Π es $\left(\frac{21}{11}, -\frac{19}{11}, \frac{10}{11}\right)$
  B) La proyección ortogonal de P en el plano Π es $\left(-\frac{21}{11}, \frac{19}{11}, \frac{10}{11}\right)$
  C) P es simétrico a $\left(\frac{21}{11}, -\frac{19}{11}, \frac{10}{11}\right)$ respecto del plano Π
  D) P es simétrico a $\left(-\frac{21}{11}, \frac{19}{11}, \frac{10}{11}\right)$ respecto del plano Π

  Opción correcta: A)

Resolución
Para hallar la proyección de P sobre el plano dado, podemos construir la recta ortogonal al plano que pasa por P. La intersección de plano con recta nos dará el punto Q, la proyección ortogonal de P sobre Π. Por otro lado, usando que el punto R, simétrico de P respecto del plano Π cumple que $\frac{P+R}{2} = Q$ podemos hallar sus coordenadas.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
Sabiendo que $\{(2,-2,-1,-1,1),(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta-\gamma,\alpha+\gamma+2\beta,1,5),(1,0,1,1,2)\}$ es linealmente dependiente, elegí cuál de las siguientes ternas de valores es la correcta.

A) $\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 3$
B) $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 3$
C) $\alpha = -4, \beta = -3, \gamma = 3$
D) $\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = -3$

Opción correcta: A)

Resolución
Si planteamos la combinación lineal $(2,-2,-1,-1,1) + 2(1,0,1,1,2) = (4,-2,1,1,5)$ podemos concluir que $(4,-2,1,1,5) = (\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta-\gamma,\alpha+\gamma+2\beta,1,5)$; de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 4 \\ \alpha+\beta-\gamma = -2 \\ \alpha+\gamma+2\beta = 1 \end{cases}$$

el cual tiene como solución no trivial $\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 3$, con lo cual la única terna que es solución del sistema es la A) . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
Considerá el conjunto:

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ -x_1+x_2-1 = -2x_4 \wedge x_2+2x_3 = 1 \wedge x_1+x_2 = 1\}$$

Elegí la opción que muestra la terna de valores hacen que el vector $(\alpha,\beta,\gamma,\gamma)$ pertenezca a S.

A) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$
B) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$
C) $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$
D) $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 0$

Opción correcta: C)

Resolución
De las ecuaciones que definen S tenemos que darnos cuenta que basta con reemplazar con las componentes de $(\alpha,\beta,\gamma,\gamma)$ y que a partir de esto obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -\alpha+\beta+2\gamma = 1 \\ \beta+2\gamma = 1 \\ \alpha+\beta = 1 \end{cases}$$

cuya resolución da por resultado la terna $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

Una circunferencia cuya ecuación es

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + kx + 6y + 20 = 0\}$$

contiene al punto $A = (11, -3)$. Indicá la única opción que muestra las coordenadas del centro O y el radio r de C.

A) $O = (6, -3), r = 5$

B) $O = (-6, 3), r = 25$

C) $O = (11, 3), r = 20$

D) $O = (-5, 3), r = 6$

Opción correcta: A)

Resolución

En la expresión general de la circunferencia $x^2+y^2+kx+6y+20 = 0$ reemplazamos las coordenadas del punto A de lo que resulta $11^2 + (-3)^2 + 11k + 6(-3) + 20 = 0$, que nos permite determinar $k = -12$. Completando cuadrados para $x^2+y^2-12x+6y+20 = 0$ obtenemos la expresión canónica $C : (x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)

Cierta parábola tiene vértice en $V = (-4, 3)$, y su directriz es la recta $x = -1, 5$. Seleccioná la única opción que muestra la expresión general de esta parábola.

A) $$10x + 31 = y^2 - 6y$$

B) $$y^2 + 10x - 6y = -49$$

C) $$y^2 - 9 = -10x - 40$$

D) $$10y^2 + x - 60y = -94$$

Opción correcta: B)

Resolución

Teniendo en cuenta la información brindada, la parábola es de la forma $(y - k)^2 = 2p(x - h)$ y su directriz $x = h - \frac{p}{2}$. Reemplazamos con los datos para la directriz $-1{,}5 = -4 - \frac{p}{2}$, lo que nos permite determinar $p = -5$. La expresión canónica de la parábola es $(y - 3)^2 = -10(x + 4)$, cuyo desarrollo nos lleva a la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.
