

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá los números complejos $z = 5 - 5i$, $w = 10 - 4i$ y $u = \bar{z} \cdot \operatorname{Im}(w) - 10 \cdot i^{19}$.
Indicá la única opción que muestra el módulo de u .

- A) $5\sqrt{10}$ B) $10\sqrt{13}$ C) 500 D) $10\sqrt{5}$

Opción correcta: D)

Resolución: $u = (5 + 5i) \cdot (-4) - 10 \cdot i^{19} = -20 - 20i + 10i = -20 - 10i$

$$|u| = \sqrt{(-20)^2 + (-10)^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen la ecuación $3z^2 - 6z + 15 = 0$. Indicá cuál de las siguientes opciones es la única verdadera:

- A) z se ubica en el segundo cuadrante.
 B) $\pi < \arg(-2z) < 2\pi$
 C) $-2z$ se ubica en el cuarto cuadrante.
 D) $\frac{\pi}{2} < \arg(z^2) < \frac{3\pi}{2}$

Opción correcta: D)

Resolución: comenzamos resolviendo la ecuación cuadrática $3z^2 - 6z + 15 = 0$ de donde surgen dos soluciones $z = 1 + 2i$ y $z = 1 - 2i$. Como una de ellas se ubica en el cuarto cuadrante, ya podemos descartar la primera opción. Si multiplicamos por -2 a cada solución obtenemos los números complejos $-2 + 4i$ y $-2 - 4i$. Como estos se encuentran en el segundo y tercer cuadrante, respectivamente, la segunda y tercera opción resultan falsas. Por otro lado, si realizamos z^2 obtenemos $(1 \pm 2i)^2 = -3 \pm 4i$. Como estos complejos corresponden a dos números complejos que se ubican en el segundo y tercer cuadrante, la cuarta opción resulta verdadera. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

El polinomio $P(x) = -27x^4 + 18x^3 + 117x^2 - 9a^2x + 14b$ es divisible por $(9x^2 - 18)$.
Indica la única opción que muestra todos los valores posibles de a y b .

- A) $a = -2, a = 2, b = -9$.
 B) $|a| = 2, b = 9$.
 C) $a = 2, b = -9$.
 D) $a = 4, b = -126$.

Opción correcta: A)

Resolución: aplicamos el algoritmo de la división entre polinomios. Para que el resto sea el polinomio nulo, debe cumplirse $-9a^2 + 36 = 0$ y $14b + 126 = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 7x^3 + 8x^2 - 56$.

Indicá la única opción que muestra la factorización de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ de $P(x)$.

- A) $(x^3 + 8) \cdot (x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7})$.
 B) $(x^3 + 8) \cdot (x + 7) \cdot (x - 7)$.
 C) $(x + 2) \cdot (x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7}) \cdot (x - 1 - \sqrt{3}i) \cdot (x - 1 + \sqrt{3}i)$
 D) $(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4) \cdot (x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7})$

Opción correcta: D)

Resolución: extrayendo factor común por grupos, podemos expresar $P(x) = (x^2 - 7) \cdot (x^3 + 8)$. Las raíces del primer factor son $x_1 = \sqrt{7}$ y $x_2 = -\sqrt{7}$. El segundo factor se anula para $x = -2$ y posee 2 raíces no reales. Dado que se pide la descomposición en factores irreducibles en $\mathbb{R}[x]$, la opción correcta es la última. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

$(b; -a; 1; a)$, $a, b \in \mathbb{R}$ es solución del sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

Elegí la única opción que muestra los valores de a y de b .

- A) $a = 5$ y $b = 2$. B) $a = 2$ y $b = 5$. C) $a = b = 5$. D) $a = b = 2$.

Opción correcta: B)

Resolución: si triangulás el sistema, vas a encontrar que es compatible determinado. Igualando coordenada a coordenada la solución obtenida con $(b; -a; 1; a)$ podrás obtener los valores de a y de b . Otro recorrido de resolución posible es tener en cuenta que como $(b; -a; 1; a)$ es una solución del sistema, debe cumplir cada ecuación y de ahí se puede deducir que $a = 2$ y luego que $b = 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & k \\ 0 & k & 1 & 2 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ k & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

Elegí la única expresión que muestra el/los valores de k para que la matriz admita inversa.

- A) $k \neq -3, k \neq 3, k \neq 0$ C) $|k| = 3$
B) $k \neq 0$ D) $k = 0$

Opción correcta: A)

Resolución: si calculás el determinante de la matriz, obtenés la expresión $-k^4 + 9k^2$. Las raíces de esta ecuación son los valores que anulan el determinante de la matriz A . A excepción de dichas raíces, k puede tomar cualquier valor real para que A admita inversa. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

U tiene una base de generadores de tres elementos y J es una transformación lineal que resulta un isomorfismo. Elegí la única opción que indica la dimensión del subespacio $J(U)$.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Opción correcta: C)

Resolución: si T es una transformación lineal y se la aplicamos a un conjunto de vectores que forma una base, los transformados de estos vectores también forman una base, es decir un isomorfismo transforma bases en bases, por lo tanto el subespacio $J(U)$ tiene la misma dimensión que U . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

Este ejercicio se da por correcto debido que hubo un error en las opciones ofrecidas.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales $T(x_1; x_2) = (x_1 - 2x_2; -2x_1 - x_2)$ y $S(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; x_1 + x_2)$.

Elegí la opción que corresponde al determinante de la matriz asociada a $T^{-1} \circ S$.

A) $-\frac{3}{2}$

B) $\frac{5}{2}$

C) $-\frac{5}{2}$

D) $\frac{3}{2}$

Opción correcta: C)

Resolución: las expresiones matriciales de T y S son, respectivamente: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$M_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces tenemos que $M_S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con lo cual

$M_{T \circ S^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Entonces: $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}$.

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.
