UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 8/11/2023 - Tema 7

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Considerá los números complejos $z = 10 - 4i$, $w = 5 - 5i$ y $u = \overline{z} \cdot Im(w) - 10 \cdot i^{17}$.
  Indicá la única opción que muestra el módulo de u.

  A) 480 B) 3400 C) $10\sqrt{34}$ D) $40\sqrt{5}$

  Opción correcta: C)
  Resolución: $u = (10+4i)\cdot(-5) - 10 \cdot i^{17} = (-50-20i) - 10i = -50 - 30i$
  $|u| = \sqrt{(-50)^2 + (-30)^2} = \sqrt{3400} = 10\sqrt{34}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  Considerá todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen la ecuación $z^2 - 6z = -25$. Indicá cuál de las siguientes opciones es la única verdadera:

  A) $0 < arg(z) < \pi$
  B) $\frac{\pi}{2} < arg(-3z) < \frac{3\pi}{2}$
  C) $0 < arg(z^2) < \pi$
  D) $-3z$ se ubica en el primer cuadrante.

  Opción correcta: B)
  Resolución: comenzamos resolviendo la ecuación cuadrática $z^2 - 6z + 25 = 0$ de donde surgen dos soluciones $z = 3 + 4i$ y $z = 3 - 4i$. Como una de ellas se ubica en el cuarto cuadrante, ya podemos descartar la primera opción. Ahora multiplicando por -3 a cada solución obtenemos los números complejos $-9 - 12i$ y $-9 + 12i$. Como estos se encuentran en el segundo y tercer cuadrante, la cuarta opción es falsa y segunda resulta verdadera. Observemos que la tercera opción es falsa pues $(3-4i)^2 = -7 - 24i$ se ubica en el tercer cuadrante entonces su argumento es mayor a π. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  El polinomio $P(x) = -27x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 4a^2x + 12b$ es divisible por $(9x^2 + 18)$. Indica la única opción que muestra todos los valores posibles de a y b.

  A) $a = -3$, $a = 3$, $b = -6$.
  B) $|a| = 3$, $b = 6$.
  C) $a = 3$, $b = 6$.
  D) $a = 9$, $b = 72$.

  Opción correcta: B)

  Resolución: aplicamos el algoritmo de la división entre polinomios. Para que el resto sea el polinomio nulo, debe cumplirse $4a^2 - 36 = 0$ y $12b - 72 = 0$. De estas ecuaciones se obtiene la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 5x^3 - 8x^2 + 40$.
  Indicá la única opción que muestra la factorización en $\mathbb{C}[x]$ de $P(x)$.

  A) $(x^3 - 8)\cdot(x - \sqrt{5})\cdot(x + \sqrt{5})$.
  B) $(x^3 - 8)\cdot(x - 5)\cdot(x + 5)$.
  C) $(x-2)\cdot(x-\sqrt{5})\cdot(x+\sqrt{5})\cdot(x+1-\sqrt{3}i)\cdot(x+1+\sqrt{3}i)$
  D) $(x-2)\cdot(x^2+2x+4)\cdot(x-\sqrt{5})\cdot(x+\sqrt{5})$

Opción correcta: C)
Resolución: extrayendo factor común por grupos, podemos expresar $P(x) = (x^2 - 5) \cdot (x^3 - 8)$. Las raíces del primer factor son $x_1 = -\sqrt{5}$ y $x_2 = \sqrt{5}$. En el segundo factor encontramos la raíz $x = 2$, y dos raíces imaginarias. Dado que se pide la descomposición en factores irreducibles en $\mathbb{C}[x]$, debemos considerar todas las raíces, de lo que resulta la solución. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

$(a; b; 0; b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ es solución del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Elegí la única opción que muestra los valores de a y de b.

A) $a = 1$ y $b = -2$.
C) $a = -2$ y $b = 1$.
B) $a = b = 1$.
D) $a = b = -2$.

Opción correcta: C)
Resolución: si triangulás el sistema, vas a encontrar que es compatible determinado. Igualando coordenada a coordenada la solución obtenida con $(a; b; 0; b)$ podrás obtener los valores de a y de b. Otro recorrido de resolución posible es tener en cuenta que como $(a; b; 0; b)$ es una solución del sistema, debe cumplir cada ecuación y de ahí se puede deducir que $b = 1$ y luego que $a = -2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$

Elegí la única expresión que muestra el/los valores de k para que la matriz admita inversa.

A) $k = 0, k = 2, k = -2$
C) $|k| = 2$
B) $|k| \neq 2$
D) $k \neq 0, k \neq 2, k \neq -2$

Opción correcta: D)

Resolución: si calculás el determinante de la matriz, obtenés la expresión $k^4 - 4k^2$. Las raíces de esta ecuación son los valores que anulan el determinante de la matriz A. A excepción de dichas raíces, k puede tomar cualquier valor real para que A admita inversa. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

$S = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ y T es una transformación lineal que resulta un isomorfismo. Elegí la única opción que indica la dimensión del subespacio $T(S)$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

Opción correcta: D)
Resolución: si T es una transformación lineal y se la aplicamos a un conjunto de vectores que forma una base, los transformados de estos vectores también forman una base, es decir: $T(S) = \{T(\vec{v}_1); T(\vec{v}_2); T(\vec{v}_3); T(\vec{v}_4)\}$ resulta una base. Por lo tanto el subespacio $T(S)$ tiene dimensión 4. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
 Considerá las transformaciones lineales $T(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; -x_1 - x_2)$ y $S(x_1; x_2) = (2x_1 - 2x_2; 2x_1 + 2x_2)$.
 Elegí la opción que corresponde al determinante de la matriz asociada a $T^{-1} \circ S$.

A) -2 B) -4 C) 4 D) 2

Opción correcta: B)

Resolución: las expresiones matriciales de T y S son, respectivamente: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M_S = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces tenemos que $M_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con lo cual $M_{T^{-1} \circ S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.